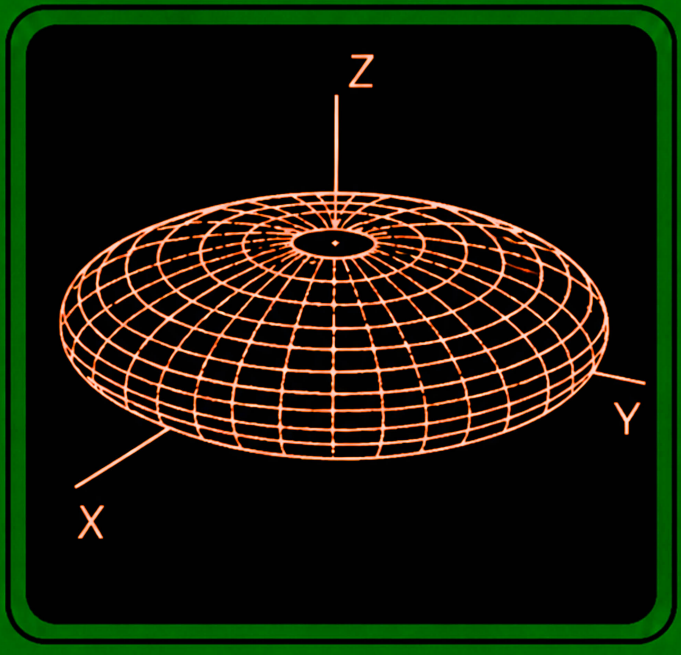
А. А. ГУСАК

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ



А.А. ГУСАК

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Издание третье,
дополненное

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования БССР в качестве *учебного пособия для естественных специальностей* высших учебных заведений

Минск
«Вышэйшая школа»
1980

ББК 22.11 я 73
Г96
УДК 51(076)

Рецензент: Н. М. Матвеев, доктор физико-математических наук, профессор Ленинградского государственного университета им. А. А. Жданова

Гусак А. А.

Г 96 Сборник задач и упражнений по высшей математике: [Учеб. пособие для естест. спец. вузов].— 3-е изд., доп.— Мн.: Выш. школа, 1980.— 272 с., ил.

В пер.: 75 к.

Приведены основные определения и формулы, необходимые для решения задач, достаточное число примеров и задач с решениями, а также задачи и упражнения для самостоятельной работы студентов. Первое издание вышло в 1965 г., второе — в 1967 г. Написано по новой программе. Добавлены новые параграфы.

Предназначено для студентов биологических, географических и геологических специальностей вузов.

20203—122
Г————————21—80 1702010000 ББК 22.11 я 73
М304(05)—80 517

© Издательство «Вышэйшая школа», 1980.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава I. Метод координат на плоскости и его простейшие приложения 5

§ 1. Прямоугольные декартовы координаты точки на плоскости. Простейшие задачи 5
§ 2. Уравнение линии в прямоугольных декартовых координатах 9
§ 3. Полярные координаты 11

Глава II. Прямая линия 17

§ 4. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой в отрезках 17
§ 5. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Пересечение двух прямых 21
§ 6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Пучок прямых. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки 24
§ 7. Нормальное уравнение прямой. Расстояние точки до прямой 28
§ 8. Разные примеры и задачи 31

Глава III. Линии второго порядка 36

§ 9. Окружность 36
§ 10. Эллипс 39
§ 11. Гипербола 44
§ 12. Парабола 48
§ 13. Преобразование уравнения второй степени при параллельном переносе системы прямоугольных координат 52
§ 14. Упрощение общего уравнения второй степени при повороте осей и параллельном переносе 57

Глава IV. Введение в анализ 62

§ 15. Функция. График функции 62
§ 16. Предел последовательности. Предел функции 66
§ 17. Число e; $\lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ 72
§ 18. Разные примеры на нахождение пределов 75
§ 19. Непрерывность функции 76

Глава V. Производная и дифференциал 79

§ 20. Производные степенных и тригонометрических функций 80
§ 21. Производная сложной функции 82

§ 22. Производные показательных и логарифмических функций 85
§ 23. Производные обратных тригонометрических функций 87
§ 24. Производная неявной функции 89
§ 25. Производные высших порядков 91
§ 26. Разные примеры на дифференцирование 92
§ 27. Дифференциал функции 95

Глава VI. Приложения производной 99

§ 28. Касательная и нормаль к плоской кривой. Кривизна кривой. Скорость и ускорение 99
§ 29. Возрастание и убывание функции. Экстремум функции. Точка перегиба 103
§ 30. Построение графиков функций. Асимптоты кривой 109
§ 31. Приближенное решение уравнений 116

Глава VII. Неопределенный интеграл 126

§ 32. Интегрирование методом разложения 127
§ 33. Независимость вида неопределенного интеграла от выбора аргумента функции 129
§ 34. Метод подстановки 133
§ 35. Метод интегрирования по частям 135
§ 36. Интегрирование тригонометрических функций 139
§ 37. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе 141
§ 38. Разные примеры на интегрирование 144

Глава VIII. Определенный интеграл и его приложения 149

§ 39. Формула Ньютона — Лейбница 150
§ 40. Приближенное вычисление определенных интегралов 155
§ 41. Площадь криволинейной фигуры 162
§ 42. Длина дуги кривой 167
§ 43. Объем тела вращения 169
§ 44. Приложения определенных интегралов к решению физических задач 173

Глава IX. Функции нескольких переменных 176

§ 45. Область определения, частные и полное приращения, непрерывность функции нескольких переменных 176
§ 46. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных 180
§ 47. Экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции 184
§ 48. Определение параметров эмпирических формул по способу наименьших квадратов 187

Глава X. Ряды 198

§ 49. Числовые ряды 199
§ 50. Степенные ряды 204

Глава XI. Дифференциальные уравнения 210

§ 51. Основные понятия 210
§ 52. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными 213

§ 53. Однородные дифференциальные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка 215
§ 54. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям 218
§ 55. Простейшие типы интегрируемых уравнений второго порядка. Случаи понижения порядка 224
§ 56. Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 228
§ 57. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами 229
§ 58. *Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и колебательные явления* 233
§ 59. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 239

Ответы 241

Приложения 262

Литература 269

ПРЕДИСЛОВИЕ

«Сборник задач и упражнений по высшей математике» написан в соответствии с программами курса высшей математики для биологических, географических и геологических специальностей университетов. В нем отражены следующие разделы этого курса: метод координат на плоскости и его простейшие приложения, прямая на плоскости, линии второго порядка, функции и пределы, производная и дифференциал, приложения производной, неопределенный интеграл, определенный интеграл и его приложения, функции нескольких переменных, ряды, дифференциальные уравнения.

Третье издание «Сборника» является переработанным и дополненным. Оно содержит следующие новые параграфы: «Преобразование уравнения второй степени при параллельном переносе координатных осей», «Упрощение общего уравнения второй степени при повороте осей и параллельном переносе», «Приближенное решение уравнений», «Приближенное вычисление определенных интегралов», «Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и колебательные явления», «Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами» и др.

Уточнены и дополнены отдельные формулировки в теоретической части некоторых параграфов (§ 15, 16, 29, 45, 54 и др.). Приняты во внимание терминология и обозначения, применяемые в курсе математики средней школы, в соответствии с новыми программами по математике.

Некоторые примеры заменены другими, более полно и четко отражающими существо рассматриваемых вопросов (§ 34, 35, 42 и др.). Многие параграфы дополнены новыми примерами, за-

дачами и упражнениями (§ 2—7, 9—12, 22, 28, 30, 36—39, 41, 46, 51—57), а два параграфа — новыми понятиями, примерами, задачами и упражнениями (в § 46 — понятия частных производных второго и высших порядков, в § 47 — достаточное условие экстремума функции двух переменных).

Структура пособия осталась прежней: в каждом параграфе имеются краткие теоретические сведения, подробно рассмотренные примеры, задачи для самостоятельного решения. Формулы теоретической части нумеруются в пределах каждой главы, в примерах нумерация формул сделана римскими цифрами (в каждом примере — своя). В конце книги приведены ответы, где к некоторым задачам даны указания, и приложения.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту — доктору физико-математических наук, профессору Н. М. Матвееву за критические замечания и ценные советы.

Автор

Глава I. МЕТОД КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ И ЕГО ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Положение точки на плоскости определяется парой чисел, называемых *координатами*. Существуют различные способы определения положения точки на плоскости, в зависимости от которых рассматривают разные системы координат: прямоугольные декартовы координаты, полярные и др.

§ 1. Прямоугольные декартовы координаты точки на плоскости. Простейшие задачи

Прямоугольными декартовыми координатами точки на плоскости называются расстояния этой точки $x=ML$, $y=MN$ (рис. 1) до координатных осей, измеренные в одних и тех же единицах длины и взятые с соответствующими знаками. Если точка расположена справа от оси Oy, то абсцисса x данной точки положительна, если слева,— отрицательна; если точка лежит выше оси Ox, ее ордината y положительна, в противном случае — отрицательна (при указанном выборе положительных направлений осей, обозначенных на рис. 1 стрелками).

Запись $M(x; y)$ означает, что точка M имеет координаты x и y.

Расстояние между двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ вычисляется по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{1}$$

Координаты точки $C(x; y)$, делящей данный отрезок AB, где $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, в данном отношении $AC:CB=l$, определяются формулами:

$$x=\frac{x_1+lx_2}{1+l}\ ;\ y=\frac{y_1+ly_2}{1+l}\ . \tag{2}$$

Замечание. В формулах (2) нумерация точек имеет существенное значение. При использовании этих формул нужно различать начало и конец отрезка.

В частном случае, при $l=1$, получаем координаты середины $E(x; y)$ отрезка AB:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}\ ;\ y=\frac{y_1+y_2}{2}\ . \tag{3}$$

Площадь треугольника с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$

$$S=\frac{1}{2}\,|[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)]|, \tag{4}$$

где двумя вертикальными чертами обозначен модуль выражения, стоящего в квадратных скобках.

Замечание. *Модуль* действительного числа x определяется так:

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x\geqslant 0;\\ -x, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Пример 1. Вычислить длины медиан треугольника с вершинами $A(-2; -2)$, $B(2; 6)$, $C(8; -4)$.

Найдем сначала основания медиан, являющиеся серединами сторон треугольника. Пусть D, E, F — соответственно середины сторон AB, BC, AC. Координаты точки D определяем по формулам (3); в данном случае $x_1=-2$, $y_1=-2$, $x_2=2$, $y_2=6$. Обозначая координаты точки D через x_D, y_D, получаем:

$$x_D=\frac{-2+2}{2}=0;\quad y_D=\frac{-2+6}{2}=2;\quad D(0;\ 2).$$

Аналогичным образом находим:

$$x_E=\frac{2+8}{2}=5;\quad y_E=\frac{6+(-4)}{2}=1;\quad E(5;\ 1);$$

$$x_F=\frac{-2+8}{2}=3;\quad y_F=\frac{-2+(-4)}{2}=-3;\quad F(3;\ -3).$$

Вычислим длину медианы AE. Подставляя в формулу (1) координаты точек A и E, т. е. значения $x_1=-2$, $y_1=-2$, $x_2=5$, $y_2=1$, получаем

$$|AE|=\sqrt{[5-(-2)]^2+[1-(-2)]^2}=\sqrt{58}.$$

По формуле (1) находим длины медиан BF и CD:

$$|BF|=\sqrt{(3-2)^2+(-3-6)^2}=\sqrt{82};$$

$$|CD|=\sqrt{(0-8)^2+(2+4)^2}=10.$$

Пример 2. В треугольнике с вершинами $P(3; 2)$, $Q(7; 2)$, $R(7; -6)$ найти длину биссектрисы QL.

Из элементарной геометрии известно, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Найдем длины этих сторон. По формуле (1) получаем:

$$|PQ|=\sqrt{(7-3)^2+(2-2)^2}=4;\quad |QR|=\sqrt{(7-7)^2+(-6-2)^2}=8.$$

Следовательно, $|PQ|:|QR|=4:8=1:2$ и $|PL|:|LR|=1:2$, где $L(x;\ y)$ — точка пересечения биссектрисы угла Q стороной PR. Координаты точки L определим по формулам (2). В данном случае $x_1=3$, $y_1=2$, $x_2=7$, $y_2=-6$, $l=\frac{1}{2}$, поэтому

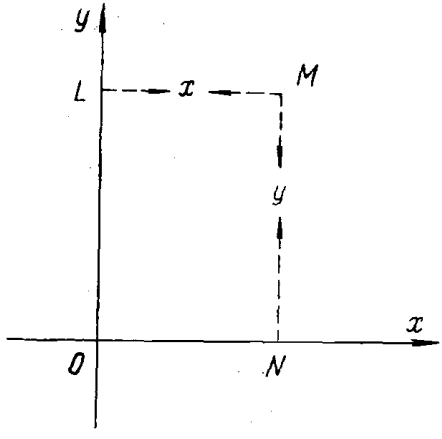


Рис. 1

$$x=\frac{3+\frac{1}{2}\cdot 7}{1+\frac{1}{2}}=\frac{13}{3};$$

$$y=\frac{2+\frac{1}{2}(-6)}{1+\frac{1}{2}}=$$

$$=-\frac{2}{3};\quad L\left(\frac{13}{3};\ -\frac{2}{3}\right).$$

По формуле (1) вычисляем длину биссектрисы QL:

$$|QL| = \sqrt{\left(7-\frac{13}{3}\right)^2+\left(2+\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{8\sqrt{2}}{3}.$$

Пример 3. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки $L(0;\ 0)$, $M(-1;\ -1)$, $N(1;\ 0)$.

Пусть $C(a;\ b)$ — центр окружности и R — ее радиус. Найдем числа a, b и R. По определению окружности $|CL|=R$, $|CM|=R$, $|CN|=R$. Определяя длины $|CL|$, $|CM|$, $|CN|$ с помощью формулы (1) и подставляя их выражения в последние три равенства, получаем:

$$\sqrt{(0-a)^2+(0-b)^2}=R \text{ или } a^2+b^2=R^2; \quad (I)$$

$$\sqrt{(-1-a)^2+(-1-b)^2}=R \text{ или } (1+a)^2+(1+b)^2=R^2; \quad (II)$$

$$\sqrt{(1-a)^2+(0-b)^2}=R \text{ или } (1-a)^2+b^2=R^2. \quad (III)$$

Раскрывая скобки в левых частях уравнений (II) и (III), используя уравнение (I) и приводя подобные члены, находим:

$$a+b+1=0;$$

$$1-2a=0.$$

Решая эту систему, получаем $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$, $C\left(\frac{1}{2};\ -\frac{3}{2}\right)$. Из уравнения (I) находим $R=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Пример 4. Даны две точки $L(4;\ 2)$, $M(6;\ -2)$. На оси Ox найти такую точку N, чтобы площадь треугольника LMN была равна 8 квадратным единицам.

Пусть $N(x;\ 0)$ — искомая точка ($y=0$, так как точка лежит на оси Ox). В формулу (4) подставим значения $x_1=4$, $y_1=2$, $x_2=6$, $y_2=-2$, $x_3=x$, $y_3=0$, $S=8$. Получим

$$8=\frac{1}{2}\,|(6-4)(0-2)-(x-4)(-2-2)|=\frac{1}{2}\,|4x-20|;$$

$$16=|4x-20|.$$

Последнее равенство эквивалентно следующим двум:

$$16=4x-20;\ 16=-(4x-20),$$

откуда $x_1=1$, $x_2=9$. Следовательно, условиям задачи удовлетворяют две точки: $N_1(1;\ 0)$, $N_2(9;\ 0)$.

1. Построить точки M_1 (2; 3), M_2 (—4; 5), M_3 (—2; —7), M_4 (6; —8), M_5 (0; 2), M_6 (3; 0), M_7 (0; —4), M_8 (—6; 0), M_9 (0; 0).

2. Построить точки, симметричные точке M (1; 4) относительно оси абсцисс, оси ординат, начала координат, биссектрисы первого координатного угла.

3. Найти координаты точек, симметричных точке M_0 $(x_0;\ y_0)$ относительно оси абсцисс, оси ординат, начала координат, биссектрисы первого и третьего координатных углов.

4. Дан прямоугольник $ABCD$ со сторонами $|AB|=2$, $|AD|=5$.

Найти координаты вершин прямоугольника, приняв его две непараллельные стороны за оси координат и точку их пересечения — за начало координат.

5. Дан ромб с диагоналями, равными 6 и 8. Найти координаты вершин ромба, приняв его диагонали за оси координат.

6. Точка, двигаясь прямолинейно, переместилась из точки M_1 (—2; —1) в точку M_2 (1; 3). Определить пройденный путь и угол между осью Ox и направлением движения.

7. Вычислить периметр треугольника с вершинами A (2; 2), B (2; 6), C (5; 2).

8. Показать, что треугольник с вершинами P (2; 3), Q (6; 6), R (3; 2) — равнобедренный.

9. Доказать, что треугольник с вершинами $A(3; 2)$, $B(0; 1)$, $C(2; -5)$ — прямоугольный.

10. На координатных осях найти точки, удаленные от точки $M(6; -4)$ на 10 единиц.

11. Найти точку, одинаково удаленную от осей координат и от точки $M(2; 9)$.

12. Разделить отрезок между точками M_1 (0; 6) и M_2 (2; 0) в таком же отношении, в каком находятся расстояния этих точек от начала координат.

13. От точки $M_1(1; -1)$ до точки $M_2(-4; 5)$ проведен отрезок. До какой точки его нужно продолжить в том же направлении, чтобы его длина утроилась?

14. Расстояние между точками $M_1(2; y)$ и $M_2(x; -4)$ делится точкой $N(3; -3)$ пополам. Найти эти точки.

15. Найти точку пересечения медиан треугольника, вершины которого $A(-3; 6)$, $B(6; 1)$, $C(3; -4)$.

16. Вычислить площадь треугольника с вершинами $P(1; -1)$, $Q(5; 6)$, $R(7; -3)$.

17. Даны две точки $L(1; 3)$ и $M(4; -6)$. На оси Oy найти такую точку N, чтобы площадь треугольника LMN равнялась 12 квадратным единицам.

18. Доказать, что точки $A(-2; -1)$, $B(-1; 1)$, $C(1; 5)$ лежат на одной прямой.

19. Вычислить площадь четырехугольника с вершинами $A(-5; 0)$, $B(1; 2)$, $C(4; -1)$, $D(3; -4)$.

20. Найти координаты вершин правильного шестиугольника, сторона которого равна 2, при условии, что начало координат помещено в центре шестиугольника, а ось абсцисс проходит через две его противоположные вершины.

21. На оси Oy найти точку, одинаково удаленную от начала координат и точки $M(2; 5)$.

22. Найти центр тяжести треугольника с вершинами $A(-1; 1)$, $B(2; 4)$, $C(5; 1)$.

23. Вычислить площадь пятиугольника с вершинами $A(4; -2)$, $B(2; 2)$, $C(-2; 3)$, $D(-3; -2)$, $E(2; -5)$.

§ 2. Уравнение линии в прямоугольных декартовых координатах

Линия на плоскости задается как некоторое множество точек.

Уравнением линии на плоскости называется такое уравнение относительно x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки этой линии и только они.

В общем виде уравнение линии на плоскости в прямоугольных декартовых координатах записывается так:

$$F(x,\ y) = 0,$$

где $F(x, y)$ — некоторая зависимость между x и y.

Из определения уравнения линии следует, что если при подстановке координат точки в данное уравнение получается тождество, то точка лежит на соответствующей линии; если тождество не получается, то точка не лежит на этой линии.

Чтобы составить уравнение линии как некоторого множества точек, необходимо: а) взять произвольную точку линии с текущими координатами x и y; б) записать общее свойство точек данного множества в виде равенства; в) выразить входящие в это равенство величины с помощью текущих координат.

Пример 1. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от двух данных точек $M_1(-4;\ 3)$ и $M_2(2;\ 5)$.

Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка данного множества. По условию,

$$|M_1M| = |M_2M|. \qquad (I)$$

С другой стороны, по формуле расстояния между двумя точками:

$$|M_1M| = \sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2};\ |M_2M| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}.$$

Подставляя эти выражения в равенство (I), находим уравнение данного множества точек:

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}.$$

Упростим его. Возводя в квадрат обе части уравнения и раскрывая скобки в подкоренных выражениях, будем иметь:

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25.$$

Перенося все члены в левую часть, приводя подобные и сокращая на 4, получаем

$$3x + y - 1 = 0.$$

Это уравнение является уравнением прямой линии (из элементарной геометрии известно, что множеством точек, указанным в условии задачи, будет прямая, перпендикулярная к отрезку M_1M_2 и проходящая через его середину).

Пример 2. Написать уравнение окружности радиуса $R=5$ с центром в начале координат. Лежат ли на этой окружности точки $A(4;\ 3)$, $B(1;\ 5)$, $C(-2;\ 9)$, $D(3;\ -4)$?

Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка окружности (множества точек, удаленных от точки 0 на 5 единиц). По определению окружности, $|OM|=5$.

Длина отрезка $[OM]$ по формуле (1) равна

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Следовательно, уравнение окружности имеет вид

$$\sqrt{x^2+y^2} = 5$$

или

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Выясним, лежат ли на данной окружности точки A, B, C и D. Подставляя координаты точки A в уравнение окружности, получаем тождество

$$4^2 + 3^2 = 25.$$

Таким образом, точка A лежит на окружности. Для точки B имеем неравенство

$$1^2 + 5^2 \neq 25.$$

Следовательно, точка B на окружности не лежит. (Отметим, что точка B лежит вне окружности, так как $|OB| = \sqrt{26} > \sqrt{25}$.) Аналогичным образом убеждаемся в том, что точка D принадлежит, а точка C не принадлежит данной окружности.

Пример 3. Найти точки пересечения линий $x^2+y^2=10$ и $x+y-4=0$.

Точка пересечения двух линий лежит как на первой, так и на второй линии, поэтому ее координаты должны удовлетворять обоим уравнениям. С другой стороны, если координаты точки удовлетворяют уравнению как первой, так и второй линии, то точка принадлежит обеим линиям, т. е. является точкой их пересечения. Следовательно, для нахождения точек пересечения двух линий достаточно решить совместно систему их уравнений.

Решим данную систему. Из последнего уравнения определим

$$y = -x + 4 \qquad (1)$$

и подставим его выражение в первое уравнение:

$$2x^2 - 8x + 6 = 0.$$

После упрощений получим $x^2-4x+3=0$, откуда $x_1=1$, $x_2=3$. Подставив эти значения в уравнение (1), найдем $y_1=3$, $y_2=1$. Следовательно, получены две точки пересечения $M(1; 3)$, $N(3; 1)$.

Пример 4. Найти точки пересечения окружности $x^2+y^2=16$ с координатными осями.

Для любой точки, лежащей на оси Ox, ордината y равна нулю (по определению прямоугольных декартовых координат точки на плоскости). Обратно, если $y=0$, то точка лежит на оси Ox. Следовательно, ось Ox имеет уравнение $y=0$. Аналогично можно показать, что уравнение оси Oy будет $x=0$.

Чтобы получить точки пересечения данной окружности с осью Ox, необходимо решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16; \\ y &= 0, \end{aligned}\right\}$$

откуда найдем две точки $A_1(-4; 0)$, $A_2(4; 0)$. Аналогичным образом получаем, что данная окружность пересекает ось Oy в точках $B_1(0; -4)$ и $B_2(0; 4)$.

Пример 5. На окружности $x^2+y^2=25$ найти точку с ординатой $y=3$.

Подставляя значение $y=3$ в уравнение окружности, получаем $x^2+3^2=25$ или $x^2=16$, откуда $x_1=4$, $x_2=-4$. Таким образом, условию задачи удовлетворяют две точки $M_2(-4; 3)$, $M_1(4; 3)$.

24. Написать уравнение линии, по которой движется точка $M(x; y)$, оставаясь втрое дальше от оси Ox, чем от оси Oy. Лежат ли на этой линии точки $P(1; 3)$, $Q(2; 5)$, $R(-2; 1)$?

25. Составить уравнение множества точек, удаленных от начала координат на 7 единиц. Принадлежат ли этому множеству точки $L(1; -2)$, $M(0; 7)$, $N(-4; 9)$?

26. Найти траекторию точки M, которая движется так, что ее расстояние от точки $A(3; 0)$ остается вдвое меньше расстояния от точки $B(-6; 0)$.

27. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от начала координат и точки $M(4; -3)$.

28. Составить уравнение множества точек, одинаково удаленных от оси Ox и от точки $A(0; 2)$.

29. Найти точки пересечения линии $3x-5y-15=0$ с координатными осями.

30. Найти точки пересечения линий, определяемых уравнениями $x^2+y^2=13$, $2x-y-1=0$.

31. Вычислить расстояние между точками пересечения линий $x^2+y^2=25$, $x+7y-25=0$.

32. Найти множество точек, равноудаленных от точек пересечения линий $x^2+y^2=25$, $2x-y+5=0$.

33. Определить траекторию движения точки M в каждом из следующих случаев: 1) расстояние до оси Oy равно a единицам; 2) расстояние до оси Ox равно b единицам; 3) расстояния до координатных осей равны между собой.

§ 3. Полярные координаты

Полярная система координат на плоскости определяется точкой O *(полюс)*, исходящим из нее лучом $[OP)$ *(полярная ось)*, масштабным отрезком e и направлением отсчета углов (рис. 2, *а*).

Полярными координатами точки M, не совпадающей с полюсом, называются расстояние $\rho>0$ *(полярный радиус)* от точки M до полюса O и угол φ *(полярный угол)* между полярной осью OP и лучом $[OM)$. Для полюса считают $\rho=0$ (значение φ не определено). Полярный угол φ имеет бесконечное множество значений. Его значение, удовлетворяющее условию $0\leqslant\varphi<2\pi$, называется *главным*.

Точку M с полярными координатами ρ и φ обозначают $M(\rho; \varphi)$.

При соответствующем выборе (полюс совпадает с началом координат, полярная ось — с положительной полуосью Ox) прямоугольной декартовой и полярной систем координат (рис. 2, *б*) связь между декартовыми координатами x и y точки M и ее полярными координатами выражается формулами:

$$x=\rho\cos\varphi;\quad y=\rho\sin\varphi;$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2};\quad \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

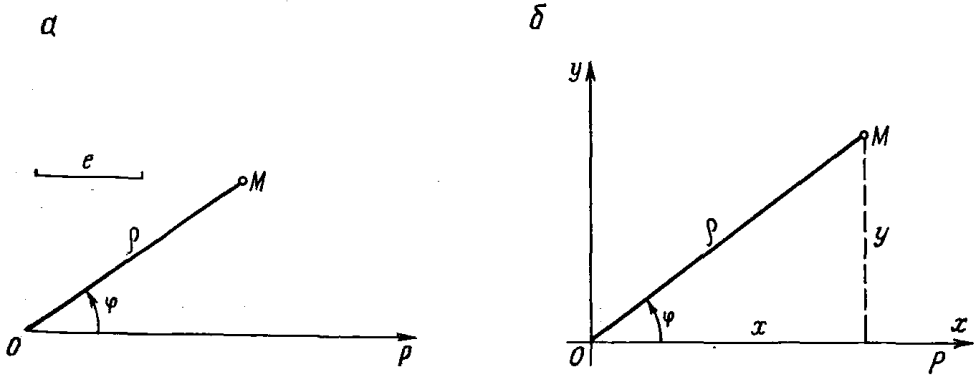


Рис. 2

Уравнение линии на плоскости в полярных координатах имеет вид

$$F(\rho,\ \varphi) = 0,$$

где $F(\rho, \varphi)$ означает некоторую зависимость между ρ и φ.

Пример 1. Составить уравнение прямой, перпендикулярной полярной оси и отсекающей от нее отрезок, длина которого равна a.

Обозначим через A точку пересечения данной прямой с полярной осью OP (рис. 3). Пусть $M(\rho; \varphi)$ — произвольная точка данной прямой. Из прямоугольного треугольника OAM находим

$$\rho \cos\varphi = a \Rightarrow \rho = \frac{a}{\cos\varphi}.$$

Полученное уравнение является искомым; ему удовлетворяют координаты *любой точки данной прямой* и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не принадлежащей этой прямой.

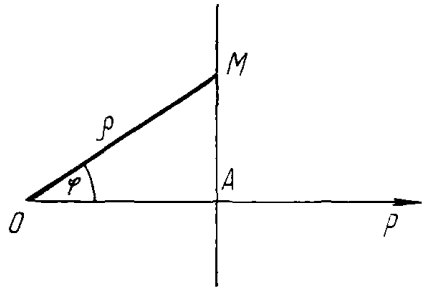


Рис. 3

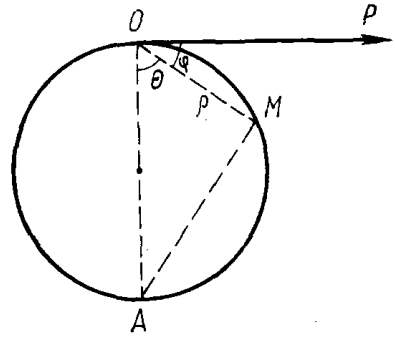


Рис. 4

Пример 2. Составить уравнение окружности радиусом R, касающейся полярной оси в полюсе, и центр которой расположен ниже полярной оси (рис. 4).

Возьмем произвольную точку M данной окружности с текущими координатами ρ и φ. Обозначив через θ угол MOA, из прямоугольного треугольника OAM найдем, что

$$2R\cos\theta = \rho.$$

Поскольку $\cos\theta = -\sin\varphi$, то искомое уравнение примет вид

$$-2R\sin\varphi = \rho \text{ или } \rho + 2R\sin\varphi = 0.$$

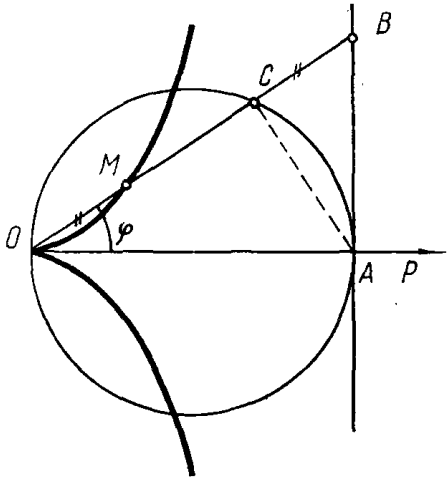


Рис. 5

Пример 3. Дана окружность диаметра $|OA|=2a$ и касательная к ней в точке A (рис. 5). Из точки O проведен луч $[OC)$ и на нем отложен отрезок $[OM]$, равный отрезку $[BC]$, заключенному между окружностью и касательной. Если луч $[OC)$ будет вращаться вокруг точки O, то точка M опишет линию, называемую *циссоидой Диоклеса*. Составить уравнение этой линии и построить ее.

Введем полярную систему координат, приняв за полюс точку O, а за полярную ось—луч $[OA)$. Полярные координаты точки M обозначим через ρ и φ. Поскольку $\rho = |OM| = |OB| - |OC|$, а $|OB| = \dfrac{2a}{\cos\varphi}$; $|OC| = 2a\cos\varphi$, то

$$\rho = \frac{2a\sin^2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Полученное уравнение и является уравнением данной линии.

Чтобы построить линию, достаточно получить ряд ее точек. Для этого нужно провести лучи OC_1, OC_2, ..., OC_n, найти соответствующие точки M_1, M_2, ..., M_n (на основании определения линии) и соединить их. Циссоида Диоклеса изображена на рис. 5.

Пример 4. Построить линию, определяемую в полярной системе координат уравнением $\rho = a^{\varphi}$, где a — произвольное положительное число, $a \neq 1$. (Эта линия называется *логарифмической спиралью*.)

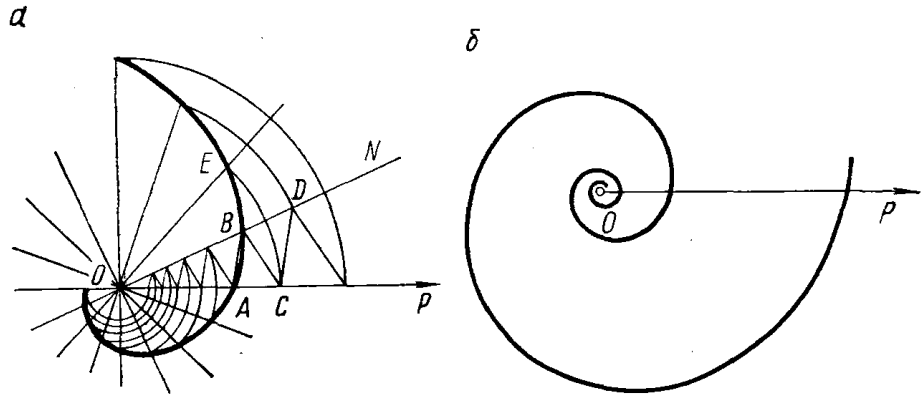


Рис. 6

Из уравнения $\rho = a^{\varphi}$ видно, что если $a > 1$, то $\rho = 1$ при $\varphi = 0$, ρ неограниченно возрастает при $\varphi \to +\infty$, и спираль развертывается против хода часовой стрелки; ρ неограниченно убывает при $\varphi \to -\infty$, и спираль закручивается по ходу часовой стрелки, делая бесконечное количество оборотов вокруг полюса. Если $a < 1$, спираль закручивается вокруг полюса против хода часовой стрелки.

Чтобы построить линию, необходимо зафиксировать некоторое значение a. Придавая произвольные значения φ, вычисляем соответствующие значения ρ. Каждой паре значений ρ и φ соответствует некоторая точка $M(\rho; \varphi)$. Эти точки можно построить и следующим образом. Проведем из полюса лучи под углом, равным, например, $\dfrac{\pi}{8}$ друг к другу (рис. 6, *а*). Тогда значения полярных радиусов точек спирали, которые откладываются на этих лучах, начиная от полярного радиуса $|OA| = 1$, направленного по полярной оси, будут $a^{\frac{\pi}{8}}$, $(a^{\frac{\pi}{8}})^2$, $(a^{\frac{\pi}{8}})^3$, ... Выразив число $a^{\frac{\pi}{8}}$ соответствующим масштабу отрезком $[OB]$, отложим этот отрезок на луче $[ON)$ и получим точку B данной спирали. Величину $(a^{\frac{\pi}{8}})^2 = |OB|^2$ полярного радиуса, который нужно отложить на следующем луче, найдем графическим путем, построив треугольник OBC, подобный треугольнику OAB, в результате чего $|OB|^2 = |OC|$; величину полярного радиуса, который нужно отложить на следующем луче, получим, построив тре-

угольник OCD, подобный треугольнику OAB, и т. д. Для определения точек спирали, расположенных по ходу часовой стрелки от точки A, необходимо построить систему уменьшающихся подобных треугольников (рис. 6, *а*). Логарифмическая спираль изображена на рис. 6, *б*.

Замечание. В природе по логарифмической спирали очерчены некоторые раковины (например, *haliotis splendes*, рис. 7, *а*). В подсолнухе семечки расположены по характерным дугам, близким, как показывают соответствующие измерения, к дугам логарифмической спирали (рис. 7, *б*).

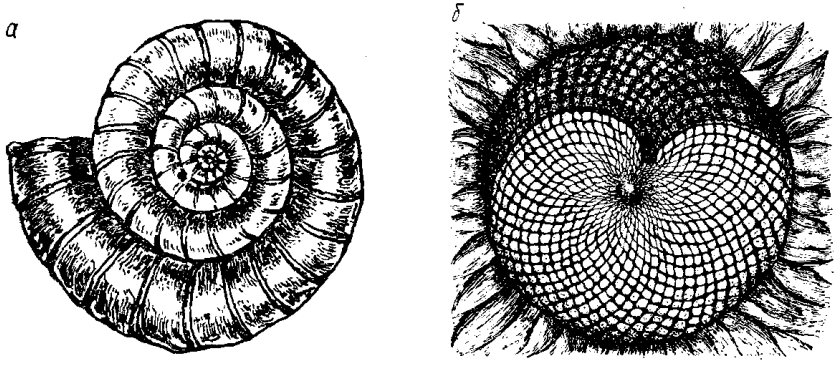


Рис. 7

34. В полярной системе координат построить точки $A(3;\ 0)$, $B\left(2;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $C\left(1;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $D(4;\ \pi)$, $E\left(1{,}5;\ \frac{3}{2}\pi\right)$.

35. Построить точки $A\left(7;\ \frac{\pi}{3}\right)$, $B\left(8;\ \frac{5\pi}{4}\right)$, $C\left(5;\ \frac{7\pi}{4}\right)$, $D\left(3{,}5;\ \frac{\pi}{6}\right)$, заданные полярными координатами.

36. Найти точки, симметричные относительно полюса соответственно точкам $A(2;\ 0)$, $B\left(8;\ \frac{\pi}{3}\right)$, $C\left(1;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $D\left(3;\ \frac{3\pi}{4}\right)$.

37. Найти точки, симметричные относительно полярной оси соответственно точкам $A\left(1;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(7;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(3;\ \frac{5\pi}{4}\right)$, $D\left(2;\ \frac{5\pi}{3}\right)$.

38. Вычислить прямоугольные декартовы координаты точек $A\left(\sqrt{2};\ \frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(1;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $C\left(\sqrt{8};\ \frac{3\pi}{4}\right)$, $D\left(2;\ \frac{11\pi}{6}\right)$, заданных полярными координатами.

39. Вычислить полярные координаты точек $A(2;\ 2)$, $B(0;\ -3)$, $C(1;\ -1)$, $D(6;\ 8)$, заданных прямоугольными декартовыми координатами.

40. Составить уравнение прямой линии, параллельной полярной оси и расположенной выше ее, если расстояние между ними равно b.

41. Составить уравнение прямой в полярных координатах, если известны ее расстояние ρ до полюса O и угол α между полярной осью и лучом, направленным из полюса перпендикулярно к этой прямой.

42. Составить уравнение окружности радиусом R, проходящей через полюс, центр которой лежит на полярной оси.

43. Составить уравнение окружности радиусом R, касающейся полярной оси в полюсе, центр которой лежит выше полярной оси.

44. Написать в декартовых координатах уравнения линий: 1) $\rho = R$; 2) $\rho \sin \varphi = b$; 3) $\rho \cos(\varphi - \alpha) = p$; 4) $\rho = 2a \cos \varphi + b$; 5) $\rho = \dfrac{a(1 \pm \sin \varphi)}{\cos \varphi}$; 6) $\rho = \dfrac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$.

45. Написать в полярных координатах уравнения линий: 1) $x^2 + (y + R)^2 = R^2$; 2) $(x - R)^2 + y^2 = R^2$; 3) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$; 4) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$; 5) $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = b^2 - a^4$.

46. Из точки O на окружности радиусом R проводится луч OK, от точки L пересечения его с окружностью откладывается отрезок $|LM| = 2R$ по направлению луча $[OK)$. Линия, описываемая точкой M при вращении луча на полный оборот вокруг точки O, называется *кардиоидой*. Составить уравнение кардиоиды и построить ее.

47. Составить уравнение множества точек, произведение расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть постоянная величина, равная a^2, где a — половина расстояния между точками F_1 и F_2 (эта линия называется *лемнискатой Бернулли*). Построить линию.

48. Через точку $E(a; \dfrac{\pi}{2})$ проведена прямая, параллельная полярной оси. Произвольный луч $[OK)$ пересекает эту прямую в точке K. На луче по обе стороны от точки K отложены отрезки $|KM_1| = |KM| = l$. Множество точек M и M_1 называется *конхоидой Никомеда*. Составить уравнение конхоиды и построить ее.

49. Написать уравнение множества точек, произведение расстояний которых до двух данных точек есть величина постоянная, равная a^2; расстояние между F_1 и F_2 равно $2b$. Построить кривую (она называется *овалом Кассини*; при $b = a$ получаем лемнискату Бернулли, см. задачу 47).

50. На окружности радиусом r фиксирована точка O. Если прямая (ON) вращается около точки O, то точки M_1 и M_2, находящиеся на данной прямой и отстоящие на расстоянии l от точки N пересечения прямой с окружностью, опишут кривую, называемую *улиткой Паскаля*. Составить уравнение этой кривой и построить ее (при $l = 2r$ получим кардиоиду).

51. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах: 1) $\rho = 7$; 2) $\rho = \dfrac{4}{\cos\varphi}$; 3) $\rho = \dfrac{5}{\sin\varphi}$; 4) $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$; 5) $\rho\cos\left(\varphi - \dfrac{\pi}{3}\right) = 2$; 6) $\rho + 6\sin\varphi = 0$.

52. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах: 1) $\rho = a\varphi$ (*спираль Архимеда*); 2) $\rho = \dfrac{a}{\varphi}$ (*гиперболическая спираль*); 3) $\rho = a\sin 3\varphi$ (*трехлепестковая роза*); 4) $\rho = a\sin 2\varphi$ (*четырехлепестковая роза*).

Глава II. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

Положение прямой линии на плоскости относительно системы координат можно задать различными способами. Например, прямая однозначно определяется двумя ее точками, точкой и направлением, отрезками, отсекаемыми на осях координат, и т. д. В зависимости от способа задания прямой рассматривают различные виды ее уравнения.

§ 4. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой в отрезках

Угловым коэффициентом прямой называется тангенс угла, образованного ею с положительным направлением оси Ox прямоугольной декартовой системы координат (положительные углы отсчитываются в направлении «против часовой стрелки» от оси Ox до прямой).

Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид

$$y = kx + b, \tag{1}$$

где k — угловой коэффициент; b — величина отрезка, отсекаемого ею на оси Oy, т. е. его длина, взятая со знаком +, если прямая пересекает положительную полуось Oy, и со знаком —, если прямая пересекает отрицательную плоскость Oy.

Уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \tag{2}$$

где A и B одновременно не обращаются в нуль (т. е. $A^2+B^2\neq 0$), называется *общим уравнением прямой*. Частные случаи уравнения (2):

1) $C = 0$, $Ax + By = 0$ (прямая, проходящая через начало координат);

2) $B = 0$, $A \neq 0$, $C \neq 0$, $Ax + C = 0$, $x = -\dfrac{C}{A} = a$ (прямая, параллельная оси Oy);

3) $B = 0$, $A \neq 0$, $C = 0$, $Ax = 0$, $x = 0$ (ось Oy);

4) $A = 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $By + C = 0$, $y = -\dfrac{C}{B} = b$ (прямая, параллельная оси Ox);

5) $A = 0$, $B \neq 0$, $C = 0$, $By = 0$, $y = 0$ (ось Ox).

Уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{3}$$

где a, b — величины отрезков, отсекаемых на осях координат.

Если прямая не параллельна оси Oy (т. е. $B \neq 0$), то ее общее уравнение, разрешая относительно y, можно привести к уравнению с угловым коэффициентом $y = kx + b$, где $k = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{C}{B}$.

Если прямая не проходит через начало координат (т. е. $C \neq 0$) и не параллельна ни одной из координатных осей, то ее общее уравнение путем деления на $-C$ можно привести к уравнению в отрезках на осях:

$$\frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1; \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Пример 1. Написать уравнение прямой, параллельной биссектрисе первого координатного угла и отсекающей на оси Oy отрезок, величина которого равна пяти единицам.

Искомая прямая, как и биссектриса первого координатного угла, образует с осью Ox угол $\alpha = 45°$, поэтому $k = \operatorname{tg} 45° = 1$. Подставив в уравнение $y = kx + b$ значения $k = 1$ и $b = 5$, получим искомое уравнение:

$$y = x + 5.$$

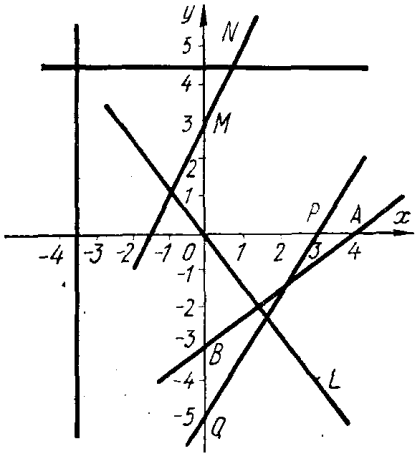


Рис. 8

Пример 2. Построить прямые: 1) $y = 2x + 3$; 2) $4x + 3y = 0$; 3) $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1$; 4) $2x + 7 = 0$; 5) $2y - 9 = 0$; 6) $6x + 3y - 12 = 0$.

Для построения прямой достаточно выбрать две ее произвольные точки. Координаты этих точек находят из уравнения прямой. Одной из координат приписывают любое значение, тогда другая однозначно определяется уравнением прямой.

1) Построим прямую $y = 2x + 3$. В уравнении прямой положим $x = 0$, тогда $y = 2 \cdot 0 + 3$, $y = 3$. Получили точку $M(0; 3)$. Полагая $x = 1$, получаем $y = 5$. Вторая точка $N(1; 5)$. Строим точки M, N и через них проводим прямую (рис. 8).

2) Построим прямую $4x + 3y = 0$. Так как коэффициент $C = 0$, то прямая проходит через начало координат. Следовательно, достаточно найти еще одну точку на прямой. Положим, например, $x = 3$, тогда $4 \cdot 3 + 3y = 0$, откуда $y = -4$; вторая точка $L(3; -4)$. Прямая, проходящая через точку L и начало координат, является искомой (см. рис. 8).

3) Уравнение $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1$ можно переписать в виде $\frac{x}{3} + \frac{y}{-5} = 1$. Это уравнение прямой в отрезках, причем $a = 3$, $b = -5$. Откладывая эти отрезки, получим точки $P(3; 0)$, $Q(0; -5)$. Через точки P и Q проводим прямую (см. рис. 8).

4) Уравнение $2x + 7 = 0$ перепишем так: $x = -\frac{7}{2}$. Эта прямая параллельна оси Oy и отсекает на оси Ox отрезок величиной $a = -3{,}5$ (см. рис. 8).

5) Прямая $2y - 9 = 0$ или $y = \frac{9}{2}$ параллельна оси Ox, отсекает на оси Oy отрезок величиной $b = 4{,}5$ (см. рис. 8).

6) Построим прямую $3x - 4y - 12 = 0$. Приведем это уравнение к виду уравнения в отрезках на осях: $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1$. Отложив эти отрезки, величины которых

$a=4$, $b=-3$, на координатных осях, получим точки A (4; 0), B (0,; —3), через которые проходит прямая (см. рис. 8).

Пример 3. Определить параметры k и b прямых: 1) $3x-4y-12=0$; 2) $2y-5=0$; 3) $6x+7y=0$.

Разрешив эти уравнения относительно y, получим соответственно: 1) $y=\frac{3}{4}x-3$; 2) $y=\frac{5}{2}$; 3) $y=-\frac{6}{7}x$.

Сравнивая каждое из полученных уравнений с уравнением (1), находим: 1) $k=\frac{3}{4}$, $b=-3$; 2) $k=0$; $b=\frac{5}{2}$; 3) $k=-\frac{6}{7}$, $b=0$.

Пример 4. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат прямыми: 1) $5x+3y-15=0$; 2) $3x-2y-6=0$; 3) $2x+3y+5=0$.

Разделим почленно первое уравнение на 15, второе — на 6, третье — на —5 и перенесем свободные члены в правые части, получим уравнения: 1) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$; 2) $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$; 3) $\frac{x}{-\frac{5}{2}}+\frac{y}{-\frac{5}{3}}=1$.

Сравнивая каждое из этих уравнений с уравнением (3), находим: 1) $a=3$, $b=5$; 2) $a=2$, $b=-3$; 3) $a=-\frac{5}{2}$, $b=-\frac{5}{3}$.

Пример 5. Даны точки $A(10; 0)$ и $B(0; -4)$. Через середину отрезка AB провести прямую, отсекающую на оси Oy отрезок, длина которого вдвое больше длины отрезка, отсекаемого на оси Ox.

Определяя координаты середины отрезка AB по формулам (3) гл. I, находим точку $C(5; -2)$. Уравнение прямой ищем в виде $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

По условию задачи, $|b|=2|a|$, т. е. $b=2a$, $b=-2a$. Следовательно, необходимо рассмотреть два случая:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{2a}=1, \qquad \text{(I)}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{-2a}=1. \qquad \text{(II)}$$

Для определения a используем условие прохождения искомой прямой через точку $C(5; -2)$. Подставляя координаты точки C в первое уравнение, получаем $\frac{5}{a}+\frac{-2}{2a}=1$, $\frac{4}{a}=1$, $a_1=4$, $b_1=2a_1=8$.

Таким образом, уравнение (I) принимает вид

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1 \text{ или } 2x+y-8=0.$$

Аналогичным образом находим: $a_2=6$, $b_2=-2a_2=-12$; уравнение (II) принимает вид

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{-12}=1 \text{ или } 2x-y-12=0.$$

Следовательно, условию данной задачи удовлетворяют две прямые.

53. Написать уравнения прямых, параллельных биссектрисе второго координатного угла и отсекающих на оси Oy отрезки: 1) $b=4$; 2) $b=-5$; 3) $b=3{,}5$; 4) $b=-2{,}7$.

54. Найти уравнения прямых, отсекающих на оси Oy отрезок $b=7$ и наклоненных к оси Ox соответственно под углами: 1) $\alpha=45°$; 2) $\alpha=60°$; 3) $\alpha=135°$; 4) $\alpha=180°$.

55. Написать уравнения прямых, проходящих через начало координат и образующих с осью Ox соответственно углы: 1) $\alpha=30°$; 2) $\alpha=45°$; 3) $\alpha=120°$; 4) $\alpha=135°$.

56. Привести к виду уравнений с угловыми коэффициентами уравнения следующих прямых: 1) $5x-y+3=0$; 2) $3x+8y=0$; 3) $4y-7x=0$; 4) $6x+3y-10=0$; 5) $2x-5y+15=0$; 6) $4x-2y-5=0$.

57. Найти углы, образуемые с осью Ox прямыми: 1) $2x+2y-5=0$; 2) $3x-3y+1=0$; 3) $4y+5=0$; 4) $2x+9=0$; 5) $5x-4y=0$; 6) $2x-5y+3=0$.

58. Определить отрезки, отсекаемые на осях координат прямыми: 1) $3x+4y-12=0$; 2) $y=6x+1$; 3) $7x-3y+21=0$; 4) $4x-5y-20=0$; 5) $y=8-4x$; 6) $9x+4y+36=0$.

59. Построить прямые, заданные уравнениями: 1) $4y-3y+12=0$; 2) $5x+3y-15=0$; 3) $4x-5y=0$; 4) $2x+7y=0$; 5) $3x+7=0$; 6) $7x-19=0$; 7) $6y-25=0$; 8) $8y+17=0$.

60. Определить площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $3x+8y-24=0$.

61. Диагонали ромба, равные 8 и 14 единицам, приняты за оси координат. Найти уравнения сторон ромба, когда: 1) ось Ox направлена вдоль большей диагонали; 2) ось Ox направлена вдоль меньшей диагонали.

62. Какова должна быть зависимость между коэффициентами A и B, чтобы прямая $Ax+By+C=0$ была наклонена к оси Ox под углом $\varphi=135°$?

63. При каких значениях C прямая $3x+5y+C=0$ отсекает на оси Oy отрезки $b_1=2$, $b_2=-3$?

64. Найти значения B, при которых прямая $7x+By+5=0$ образует с осью Ox углы: 1) $\varphi=45°$; 2) $\varphi=135°$.

65. При каких значениях A прямая $Ax+8y-20=0$ отсекает на координатных осях равные отрезки?

66. Определить параметр b, при котором прямая $y=5x+b$ отсекает на оси Ox отрезок $a=4$.

67. Исследовать, как расположены относительно осей координат следующие прямые: 1) $2x-3y=0$; 2) $4x+5y=0$; 3) $2y-11=0$; 4) $3x+2=0$; 5) $3x+7y-21=0$; 6) $9x+2y+18=0$; 7) $5x-2y=10$; 8) $6x=0$; 9) $9y=0$. Построить эти прямые.

68. При каком значении коэффициента C площадь, заключенная между осями координат и прямой $2x+9y+C=0$, будет равна 9 квадратным единицам?

69. Даны точки $A(-12;\ 0)$ и $B(0;\ 8)$. Через середину отрезка AB провести прямую, отсекающую на оси Ox отрезок, длина которого втрое больше длины отрезка, отсекаемого на оси Oy.

70. Даны прямая $Ax+By+C=0$ и две точки $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$. Найти необходимые и достаточные условия, при кото-

рых эти точки: 1) лежат по одну сторону от данной прямой; 2) лежат по разные стороны от нее.

71. Определить положение точек $A(2; 2)$, $B(3; 1)$, $C(7; 6)$, $D(5; 3)$, $E(1; -8)$, $F(-9; 6)$ относительно прямой $x+y-4=0$.

72. Определить положение отрезка $[KL]$ относительно прямой $3x+2y-6=0$ в каждом из следующих случаев: 1) $K(1; 1)$, $L(2; 2)$; 2) $K(4; 1)$, $L(2; 3)$; 3) $K(-1; 2)$, $L(2; -3)$; 4) $K(0; 3)$, $L(2; 0)$.

73. Определить положение прямой $3x+4y-12=0$ относительно треугольника с вершинами $K(-4; 1)$, $L(2; 5)$, $M(6; 3)$.

§ 5. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Пересечение двух прямых

Тангенс угла между двумя прямыми

$$y = k_1x + b_1;$$

$$y = k_2x + b_2$$

определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{4}$$

Замечание. Формула (4) определяет тангенс одного из двух углов между прямыми, сумма которых равна 180°. Меняя нумерацию прямых, получаем второе значение для тангенса угла, отличающееся от первого только знаком.

Условие *параллельности* этих прямых имеет вид

$$k_1 = k_2, \tag{5}$$

а условие их *перпендикулярности*

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

Если прямые заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0;$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то условие их параллельности выражается равенством

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \tag{6}$$

условие перпендикулярности — равенством

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{7}$$

Замечания: 1. Условие (6) означает, что если прямые параллельны, то коэффициенты при текущих координатах одной прямой можно получить из соответствующих коэффициентов другой путем умножения их на одно и то же число.

2. Из условия (7) следует, что если прямые перпендикулярны, то коэффициенты при x и y одной из них получаются из соответствующих коэффициен-

тов другой переменной их мест и изменением знаков одного из коэффициентов. Например, прямые

$$Ax + By + C = 0;$$

$$Bx - Ay + C_1 = 0$$

перпендикулярны.

Для нахождения точки пересечения прямых необходимо исследовать систему соответствующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0;\\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

причем при

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

имеется единственная точка пересечения, при

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \tag{8}$$

прямые не имеют общей точки (они параллельны), при

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

прямые имеют бесконечное множество общих точек (они совпадают).

Пример 1. Найти угол между прямыми $7x+3y-1=0$ и $5x-2y+4=0$.

Разрешив эти уравнения относительно y, получим

$$y = -\frac{7}{3}x + \frac{1}{3}\ ;\ y = \frac{5}{2}x + 2,$$

откуда $k_1 = -\frac{7}{3}$; $k_2 = \frac{5}{2}$.

Подставляя полученные значения в формулу (4), находим

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{5}{2} - \left(-\frac{7}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{5}{2}} = \frac{\frac{29}{6}}{-\frac{29}{6}} = -1;\ \varphi = 135°.$$

Воспользуемся замечанием 1. Если в заданном примере считать первой прямую $5x-2y+4=0$, то $k_1 = \frac{5}{2}$, $k_2 = -\frac{7}{3}$. По формуле (8) находим, что $\operatorname{tg}\varphi = 1$, откуда $\varphi = 45°$ (сделайте чертеж).

Пример 2. Указать, какие из следующих прямых параллельны и перпендикулярны: 1) $2x-5y+6=0$; 2) $2x+5y-8=0$; 3) $4x-10y+3=0$; 4) $10x+4y+7=0$.

Первая и третья прямые параллельны, так как выполняется условие (6). В самом деле, $A_1 = 2$; $B_1 = -5$; $A_2 = 4$; $B_2 = -10$; $\frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{B_1}{B_2} = \frac{-5}{-10} = \frac{1}{2}$; $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Третья и четвертая прямая перпендикулярны, ибо выполняется условие (7). Действительно, $A_1A_2 + B_1B_2 = 4\cdot 10 + (-10)\cdot 4 = 0$.

Первая и четвертая прямые также перпендикулярны.

Пример 3. Вычислить площадь треугольника, стороны которого заданы уравнениями $3x-2y+5=0$, $x+3y+9=0$, $9x+5y-29=0$.

Искомую площадь вычислим по формуле (4) гл. I, для чего сначала найдем координаты вершин треугольника. Решая систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y+5=0;\\ x+3y+9=0, \end{aligned}\right\}$$

находим вершину $P(-3;\ -2)$. Система

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y+5=0;\\ 9x+5y-29=0 \end{aligned}\right\}$$

дает вторую вершину $Q(1;\ 4)$. Наконец, из системы

$$\left.\begin{aligned} x+3y+9=0;\\ 9x+5y-29=0 \end{aligned}\right\}$$

получим третью вершину $R(6;\ -5)$. С помощью формулы (4) гл. I находим, что $S=33$ кв. ед.

Пример 4. Через точку $M(2;\ -4)$ провести прямую, параллельную прямой $3x+5y-6=0$, и прямую, перпендикулярную данной прямой.

Уравнение прямой, параллельной данной, ищем в виде

$$3x+5y+C=0,$$

где C — пока неизвестный коэффициент. Так как искомая прямая проходит через точку $M(2;\ -4)$, то координаты последней должны удовлетворять уравнению прямой. Подставляя координаты точки в искомое уравнение, получаем

$$3\cdot 2+5\cdot(-4)+C=0 \text{ или } C=14.$$

Следовательно, уравнение искомой прямой имеет вид

$$3x+5y+14=0.$$

Уравнение прямой, перпендикулярной данной, будем искать в виде

$$5x-3y+C=0.$$

Определим C из условия, что прямая проходит через точку $M(2;\ -4)$. Подставив ее координаты в уравнение, получим

$$5\cdot 2-3\cdot(-4)+C=0 \text{ или } C=-22.$$

Таким образом, прямая, перпендикулярная данной, имеет уравнение

$$5x-3y-22=0.$$

74. Найти углы между прямыми: 1) $y=\frac{1}{3}x+4$, $y=2x-3$; 2) $y=-\frac{1}{5}x+6$, $y=-\frac{3}{2}x+7$; 3) $y=\frac{1}{6}x-10$, $x-6y+9=0$; 4) $y=\frac{2}{9}x-1$, $9x+2y-5=0$; 5) $x+\sqrt{3}y-2=0$, $3x+\sqrt{3}y+5=0$; 6) $x-3y+4=0$, $2x-y+6=0$; 7) $7x+19y-16=0$, $5x-4y-12=0$; 8) $2x-2y-1=0$, $6x-2y+5=0$.

75. Указать, какие из следующих прямых параллельны и перпендикулярны: 1) $3x+5y-1=0$; 2) $6x+10y-3=0$; 3) $5x-3y+2=0$; 4) $6x-10y+7=0$.

76. Через точку $M(3; 4)$ провести прямую, образующую угол $\varphi=45°$ с прямой $5x-6y+7=0$.

77. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $3x+4y-12=0$, $4x-3y+5=0$, $7x+y-6=0$.

78. Составить уравнение прямой, которая проходит через начало координат и при этом: 1) параллельна прямой $4x-7y+3=0$; 2) перпендикулярна прямой $y=2x-6$; 3) образует угол в 45° с прямой $3x-2y+5=0$.

79. Написать уравнения двух перпендикуляров к прямой $2x-3y-6=0$, восстановленных в точках пересечения ее с осями координат.

80. Через точку пересечения двух прямых $2x+3y-5=0$ и $6x-7y+1=0$ провести прямую, параллельную прямой $4x+5y-3=0$.

81. Найти длины сторон и внутренние углы треугольника с вершинами $P(-4; 2)$, $Q(0; -1)$, $R(3; 3)$.

82. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(3; -4)$ и при этом: 1) параллельной оси Oy; 2) параллельной биссектрисе второго координатного угла; 3) параллельной прямой $3x-5y-7=0$; 4) перпендикулярной прямой $y=\frac{1}{3}x+4$; 5) образующей угол в 60° с прямой $y=\sqrt{3}x-2$.

83. Через точку пересечения прямых $3x+5y-8=0$ и $4x-7y+3=0$ провести прямую, перпендикулярную первой из них.

84. Через точку пересечения прямых $2x-3y+5=0$ и $3x+5y-21=0$ провести прямую, параллельную прямой $7x-6y+3=0$.

85. Через точку пересечения прямых $4x-5y+2=0$, $2x+7y-18=0$ провести прямую под углом $\varphi=45°$ к прямой $3x-5y+3=0$.

86. Даны две стороны параллелограмма $x+y-2=0$, $2x-3y+1=0$ и точка $E(2; 3)$ пересечения его диагоналей. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

87. Найти периметр, площадь и внутренние углы треугольника, стороны которого лежат на прямых $3x-2y+5=0$, $x+3y+9=0$, $9x+5y-29=0$.

§ 6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении. Пучок прямых. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ в данном направлении

$$y-y_1=k(x-x_1), \tag{9}$$

где $k=\operatorname{tg}\alpha$; α — угол, образуемый этой прямой с осью Ox прямоугольной декартовой системы координат.

Если в уравнении (9) считать, что k принимает все действительные значения, то это уравнение будет уравнением *пучка прямых*, т. е. совокупности прямых, проходящих через данную точку (центр пучка). Отметим, что уравнение (9) не определяет лишь прямую пучка, параллельную оси Oy; ее уравнение $x=x_1$.

Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения двух прямых $Ax+By+C=0$; $A_1x+B_1y+C_1=0$, имеет вид

$$\alpha(Ax+By+C)+\beta(A_1x+B_1y+C_1)=0, \tag{10}$$

где α и β принимают всевозможные действительные значения. Прямая пучка определяется отношением $\alpha:\beta$.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\quad (x_1\neq x_2,\ y_1\neq y_2). \tag{11}$$

Если $x_1=x_2$, то уравнение прямой запишется так: $x=x_1$; если $y_1=y_2$, то уравнение принимает вид $y=y_1$.

Пример 1. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(4;\ -6)$ и параллельной биссектрисе первого координатного угла.

Искомая прямая, как и биссектриса первого координатного угла, образует с положительным направлением оси Ox угол $\varphi=45°$, поэтому $k=\operatorname{tg}45°=1$. Так как точка M дана, то $x_1=4$, $y_1=-6$.

Уравнение (9) при $k=1$, $x_1=4$, $y_1=-6$ принимает вид

$$y+6=1\cdot(x-4)\ \text{или}\ x-y-10=0.$$

Пример 2. Составить уравнение пучка прямых, проходящих через точку $M(-3;\ 2)$. Среди прямых пучка выбрать прямую, параллельную прямой $5x-4y+7=0$, и прямую, перпендикулярную ей.

Так как координаты точки M известны, то уравнение $y-2=k(x+3)$, где k может принимать любые действительные значения, будет уравнением пучка прямых, проходящих через точку M.

При каждом фиксированном значении k получаем вполне определенную прямую. Среди этого множества прямых выберем ту, которая параллельна прямой $5x-4y+7=0$. Разрешив последнее уравнение относительно y, получим

$$y=\frac{5}{4}x+\frac{7}{4},$$

откуда $k=\frac{5}{4}$, где k — угловой коэффициент данной прямой. Искомая прямая будет также иметь угловой коэффициент $k=\frac{5}{4}$.

Подставляя это значение k в уравнение пучка, находим уравнение искомой прямой:

$$y-2=\frac{5}{4}(x+3);\ 4y-8=5x+15$$

или

$$5x-4y+23=0.$$

Прямая, перпендикулярная прямой $5x-4y+7=0$, получается из уравнения пучка при $k=-\frac{4}{5}$ (это значение k найдено из условия перпендикуляр-

ности $k_1 = -\frac{1}{k_2}$). Следовательно, вторая искомая прямая определяется уравнением

$$y - 2 = -\frac{4}{5}(x + 3)$$

или

$$4x + 5y + 2 = 0.$$

(Решение задачи на отыскание прямых, параллельных или перпендикулярных данной прямой, сравните с решением примера 4 § 5.)

Пример 3. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны и высоты треугольника с вершинами $P(-3; -2)$, $Q(1; 4)$, $R(6; -5)$.

Напишем уравнение стороны (PQ). Для этого подставим в уравнение (11) следующие значения: $x_1 = -3$, $y_1 = -2$, $x_2 = 1$, $y_2 = 4$. Получим

$$\frac{y+2}{4+2} = \frac{x+3}{1+3} \text{ или } y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Из этого уравнения следует, что $k_{(PQ)} = \frac{3}{2}$, где $k_{(PQ)}$ обозначен угловой коэффициент прямой (PQ).

Чтобы получить уравнение прямой (QR), необходимо подставить в уравнение (11) значения $x_1 = 1$; $y_1 = 4$; $x_2 = 6$; $y_2 = -5$. В результате подстановки найдем

$$\frac{y-4}{-5-4} = \frac{x-1}{6-1} \text{ или } y = -\frac{9}{5}x + \frac{29}{5}.$$

откуда угловой коэффициент прямой $k_{(QR)} = -\frac{9}{5}$.

Аналогичным образом найдем уравнение прямой (PR):

$$\frac{y+2}{-5+2} = \frac{x+3}{6+3}; \quad y = -\frac{1}{3}x - 3,$$

откуда $k_{(PR)} = -\frac{1}{3}$.

Высота, опущенная из точки $R(6; -5)$ на сторону (PQ), определяется уравнением (9). В данном случае $x_1 = 6$, $y_1 = -5$, $k = -\frac{2}{3}$ (значение k найдено из условия перпендикулярности двух прямых $k_1 = -\frac{1}{k_2}$, $k_2 = k_{(PQ)} = \frac{3}{2}$). Подставляя эти значения в уравнение (9), получаем

$$y + 5 = -\frac{2}{3}(x - 6); \quad 2x + 3y + 3 = 0.$$

Уравнение высоты, опущенной из вершины $Q(1; 4)$, определяется следующими данными: $x_1 = 1$, $y_1 = 4$, $k = 3$ (так как $k_{(PR)} = -\frac{1}{3}$). Подставляя полученные значения в уравнение (9), находим

$$y - 4 = 3(x - 1); \quad 3x - y + 1 = 0.$$

Аналогично найдем уравнение третьей высоты:

$$y+2=\frac{5}{9}(x+3);\ 5x-9y-3=0.$$

Пример 4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $x+2y-3=0$, $3x-y-2=0$ и перпендикулярной прямой $2x+3y+7=0$ (не находя точки M).

Уравнение пучка прямых, проходящих через точку M, в соответствии с уравнением (10) имеет вид

$$\alpha(x+2y-3)+\beta(3x-y-2)=0$$

или

$$(\alpha+3\beta)x+(2\alpha-\beta)y-3\alpha-2\beta=0. \qquad (I)$$

Записывая условие перпендикулярности [формула (7)] для данного случая, получаем равенство

$$2(\alpha+3\beta)+3(2\alpha-\beta)=0,$$

отсюда

$$8\alpha+3\beta=0 \text{ или } \beta=-\frac{8}{3}\alpha.$$

Подставляя это выражение для β в уравнение (I), находим

$$3x-2y-1=0.$$

88. Стороны треугольника лежат на прямых, заданных уравнениями $x+3y+9=0$, $3x-2y+5=0$, $9x+5y-29=0$. Найти координаты вершин и уравнения прямых, на которых лежат высоты треугольника.

89. Дан треугольник с вершинами $P(-3;\ -2)$, $Q(1;\ 4)$, $R(6;\ -5)$. Написать уравнения прямых, на которых лежат его медианы.

90. Вершины треугольника находятся в точках $P(3;\ 4)$, $Q(3;\ 2)$, $R(-1;\ 2)$. Написать уравнения сторон треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника.

91. Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами $P(-3;\ -5)$, $Q(2;\ 6)$, $R(7;\ -10)$.

92. Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения медиан треугольника, стороны которого лежат на прямых $x+3y+9=0$, $3x-2y+5=0$, $9x+5y-29=0$.

93. Найти точку, равноудаленную от трех данных точек $L(4;\ -1)$, $M(8;\ 1)$, $N(9;\ 4)$.

94. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;\ 2)$ и точку пересечения медиан треугольника, стороны которого лежат на прямых $x-y-4=0$, $2x-11y+37=0$, $2x+7y-17=0$.

95. На прямой $x+4y-3=0$ найти точку, равноудаленную от точек $M_1(2;\ -2)$, $M_2(4;\ -4)$.

96. Найти точку, симметричную точке $M(7;\ 2)$ относительно прямой $x+y-4=0$.

97. Найти проекцию точки $M(8;\ -2)$ на прямую $x-y-2=0$.

98. Какие отрезки отсекает на осях координат прямая, проходящая через точку $M(6; -1)$ и проекцию точки $N(-5; 4)$ на прямую $x - y - 5 = 0$?

99. Какой угол образует с осью Oy прямая, проходящая через точку $M(3; 3)$ и точку, симметричную точке $N(5; 5)$ относительно прямой $x + y - 3 = 0$?

100. Какой угол образует с осью Ox прямая, проходящая через точку $M(1; 3)$ и точку пересечения медиан треугольника с вершинами $P(-1; 4)$, $Q(2; 3)$, $R(5; 8)$?

101. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M пересечения прямых $2x - y - 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$ и параллельной прямой $4x - y + 1 = 0$ (не находя точки M).

102. Среди прямых пучка $\alpha(3x - 2y - 1) + \beta(4x + 5y - 9) = 0$ найти прямую, отсекающую на осях координат равные отрезки.

§ 7. Нормальное уравнение прямой. Расстояние точки до прямой

Нормальное уравнение прямой имеет вид

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \tag{12}$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую; α — угол, образуемый этим перпендикуляром с осью Ox.

Расстоянием точки до прямой называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую.

Расстояние точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой (12) вычисляется по формуле

$$d = |x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p|. \tag{13}$$

Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0 \tag{14}$$

умножением на нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}, \tag{15}$$

знак которого противоположен знаку C, приводится к нормальному уравнению

$$\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Расстояние точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой (14) вычисляется по формуле

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|. \tag{16}$$

Биссектрисы углов, образованных пересекающимися прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$; $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, определяются уравнениями

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{17}$$

Пример 1. Вычислить расстояние точки $M(10; -15)$ до прямой

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 7 = 0.$$

Данное уравнение является нормальным уравнением прямой, так как оно удовлетворяет двум условиям: 1) сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах равна единице; 2) свободный член отрицателен. Следовательно, можно пользоваться формулой (13). Подставляя в эту формулу координаты данной точки, т. е. $x_1=10$, $y_1=-15$, находим

$$d=\left|\frac{3}{5}\cdot 10-\frac{4}{5}(-15)-7\right|=11.$$

Пример 2. Найти расстояние точки $M(1;\ -2)$ до прямой

$$\frac{1}{3}x-\frac{1}{4}y-5=0.$$

Свободный член этого уравнения отрицателен, но уравнение не является уравнением в нормальном виде, так как не выполнено первое условие (сумма квадратов коэффициентов при текущих координатах не равна единице). По формуле (15), взяв в ней знак плюс (поскольку $C=-5<0$), найдем нормирующий множитель:

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2}}=\frac{3\cdot 4}{5}=\frac{12}{5}.$$

Умножив исходное уравнение на нормирующий множитель, приведем его к нормальному виду:

$$\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-12=0.$$

По формуле (13) вычисляем искомое расстояние:

$$d=\left|\frac{4}{5}\cdot 1-\frac{3}{5}(-2)-12\right|=10.$$

Пример 3. Дан треугольник с вершинами $P(2;\ -1)$, $Q(6;\ -4)$, $R(10;\ 3)$. Найти длину высоты, опущенной из точки R.

Задача сводится к вычислению расстояния точки R до прямой (PQ). Напишем уравнение этой прямой. На основании уравнения (11) имеем:

$$\frac{y+1}{-4+1}=\frac{x-2}{6-2};\quad \frac{y+1}{-3}=\frac{x-2}{4}$$

или

$$3x+4y-2=0.$$

Расстояние точки R (10; 3) до этой прямой вычислим по формуле (16):

$$d=\left|\frac{3\cdot 10+4\cdot 3-2}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=8.$$

Следовательно, длина высоты равна 8.

Пример 4. Составить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $3x-4y-7=0$, $8x+6y-1=0$.

В соответствии с формулой (17) получаем

$$\frac{3x-4y-7}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\pm\frac{8x+6y-1}{\sqrt{8^2+6^2}}.$$

Преобразуя эти уравнения, находим

$$\frac{3x-4y-7}{5}=\pm\frac{8x+6y-1}{10};\quad 2(3x-4y-7)=\pm(8x+6y-1);$$

$$2(3x-4y-7)=8x+6y-1;\quad 2x+14y+13=0;$$

$$2(3x-4y-7)=-(8x+6y-1);\quad 14x-2y-15=0.$$

Таким образом, получены уравнения биссектрис

$$2x+14y+13=0;\quad 14x-2y-15=0.$$

103. Являются ли нормальными уравнения прямых: 1) $\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-7=0$; 2) $\frac{2}{5}x-\frac{4}{5}y+6=0$; 3) $\frac{1}{3}x-\frac{2}{5}y-8=0$; 4) $\frac{5}{13}x-\frac{12}{13}y-10=0$; 5) $\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-9=0$; 6) $8x-7y-19=0$?

104. Привести к нормальному виду уравнения прямых: 1) $3x+4y-5=0$; 2) $9x-12y+25=0$; 3) $12x+5y-39=0$; 4) $8x+6y+35=0$; 5) $y=2x-3$; 6) $2x-3y-6=0$.

105. Вычислить расстояния точек $K(6;-3)$, $L(1;2)$, $M(2;9)$, $N(4;5)$ до прямой $3x-4y-15=0$.

106. Вычислить расстояние данной точки M до указанной прямой в каждом из следующих случаев: 1) $4x+3y-10=0$, $M(1;-1)$; 2) $6x-8y+17=0$, $M(-5;-1)$; 3) $12x-9y-30=0$, $M(-1;2)$; 4) $5x+12y+19=0$, $M(2;3)$; 5) $3x+y-7=0$, $M(3;8)$; 6) $x-7y+10=0$, $M(-9;-7)$.

107. Найти длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $12x+5y-169=0$. Определить координаты основания этого перпендикуляра.

108. На прямой $2x+y=0$ найти точку, равноудаленную от начала координат и от прямой $2x+y-4=0$.

109. Написать уравнение прямой, параллельной данной прямой $3x-4y-25=0$ и отстоящей от нее на расстоянии $d=3$.

110. Найти расстояние между параллельными прямыми $12x+5y-13=0$ и $12x+5y-39=0$.

111. Даны уравнения оснований трапеции: $4x+3y-20=0$, $4x+3y-45=0$. Вычислить длину ее высоты.

112. Вычислить площадь квадрата, две противоположные стороны которого лежат на прямых $8x+6y+10=0$, $8x+6y-10=0$.

113. Составить уравнение множества точек, равноудаленных от прямых $12x-5y-26=0$, $12x-5y-78=0$.

114. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(1;5)$ на расстоянии 5 единиц от начала координат.

115. Написать уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $x+y-1=0$ и $x-7y-7=0$.

116. Составить уравнение биссектрисы того угла между двумя

прямыми $4x-3y-10=0$, $9x-12y-7=0$, в котором лежит начало координат.

117. Составить уравнение биссектрисы того угла между двумя прямыми $3x+4y+12=0$, $4x+3y-12=0$, в котором лежит точка $M(1; 2)$.

118. Даны уравнение одной из сторон угла $x+y-1=0$ и уравнение его биссектрисы $x+3y-3=0$. Написать уравнение другой стороны угла.

119. Найти точку, равноудаленную от точек $M(-3; 1)$, $N(5; 7)$ и отстоящую от прямой $3x-4y+38=0$ на расстоянии $d=5$.

120. Даны центр квадрата $N(4; 3)$ и уравнение одной стороны $x-y-5=0$. Написать уравнения остальных трех сторон.

121. Написать уравнения биссектрис внутренних углов треугольника, стороны которого лежат на прямых $x-y-1=0$, $x+y-3=0$, $7x-y-37=0$.

122. Найти точку пересечения биссектрис внутренних углов треугольника с вершинами $A(2; 1)$, $B(6; 5)$, $C(5; -2)$.

123. Какой угол образует с осью Ox прямая, проходящая через начало координат и точку пересечения биссектрис внутренних углов треугольника с вершинами $A(1; 4)$, $B(5; 8)$, $C(4; 1)$?

124. Найти углы, образованные биссектрисами внутренних углов треугольника с вершинами $A\left(-\frac{72}{7}; -\frac{75}{7}\right)$, $B(0; 3)$, $C(4; 0)$.

§ 8. Разные примеры и задачи

Пример 1. Написать уравнение прямой, перпендикулярной прямой $x+2y-1=0$ и отсекающей от двух данных прямых $x-y-1=0$, $x+y+1=0$ треугольник, площадь которого равна 24.

Уравнение прямой, перпендикулярной данной, будем искать в виде

$$2x-y+C=0,$$

где C — пока неизвестный коэффициент.

Найдем координаты вершин треугольника, площадь которого дана в условии, для чего решим три системы уравнений:

$$1)\ \begin{cases} x-y-1=0; \\ x+y+1=0; \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} x-y-1=0; \\ 2x-y+C=0; \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} x+y+1=0; \\ 2x-y+C=0. \end{cases}$$

Из этих систем соответственно находим: $x_1=0$, $y_1=-1$; $x_2=-C-1$, $y_2=-C-2$; $x_3=-\frac{C+1}{3}$, $y_3=\frac{C-2}{3}$.

Подставляя найденные значения в формулу (4) гл. I для вычисления площади треугольника по координатам его вершин, получаем $(-C-1-0)\times\left(\frac{C-2}{3}+1\right)-(-C-2+1)\left(-\frac{C+1}{3}-0\right)=\pm 24$; $-\frac{(C+1)(C+1)}{3}-\frac{(C+1)(C+1)}{3}=\pm 24$; $(-2)(C+1)^2=-72$; $(C+1)^2=36$; $C+1=\pm 6$; $C_1=5$, $C_2=-7$.

Следовательно, условию задачи удовлетворяют две прямые

$$2x-y+5=0;\ 2x-y-7=0.$$

Пример 2. Составить уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника, если известна одна его вершина $A(5; -1)$, а также уравнения прямых $8x-y-21=0$, $3x-y-6=0$, на которых лежат соответственно высота и биссектриса, проведенные из одной вершины.

Так как координаты точки A не удовлетворяют уравнениям данных прямых, то высота и биссектриса проведены из другой вершины треугольника, обозначим ее буквой B. Решив систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 8x - y - 21 &= 0; \\ 3x - y - 6 &= 0, \end{aligned}\right\}$$

получим координаты $x=3$, $y=3$ вершины B. Зная точки $A(5; -1)$, $B(3; 3)$, составим уравнение прямой, на которой лежит сторона (AB):

$$\frac{y+1}{3+1} = \frac{x-5}{3-5}; \quad \frac{y+1}{4} = \frac{x-5}{-2}; \quad y+1 = 2(5-x); \quad 2x+y-9=0.$$

Уравнение прямой, на которой лежит сторона (AC) напишем, как уравнение прямой, проходящей через точку $A(5; -1)$ и перпендикулярной прямой $8x-y-21=0$:

$$x+8y+C_1=0; \quad 5+8\cdot(-1)+C_1=0; \quad C_1=3; \quad x+8y+3=0.$$

Чтобы составить уравнение прямой, на которой лежит сторона (AC), предварительно найдем точку A', симметричную точке A относительно прямой $3x-y-6=0$:

$$x+3y+C_2=0; \quad 5+3\cdot(-1)+C_2=0; \quad C_2=-2; \quad x+3y-2=0;$$

$$\left.\begin{aligned} x+3y-2 &= 0; \\ 3x-y-6 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad x=2, \; y=0; \quad S(2; 0) \text{ — середина отрезка } [AA'];$$

$$\frac{5+x}{2}=2; \quad \frac{-1+y}{2}=0; \quad x=-1; \quad y=1; \quad A'(-1; 1).$$

Сторона (BC) лежит на прямой, проходящей через точки B и A':

$$\frac{y-3}{1-3} = \frac{x-3}{-1-3}; \quad \frac{y-3}{-2} = \frac{x-3}{-4}; \quad 2y-6=x-3; \quad x-2y+3=0.$$

125. Найти вершины, длины сторон, площадь и внутренние углы треугольника, стороны которого лежат на прямых $x-y+7=0$, $x+y-1=0$, $7x-y+1=0$.

126. Какой угол образует с осью Oy прямая, проходящая через точку пересечения медиан и точку пересечения биссектрис внутренних углов треугольника с вершинами $A(2; 1)$, $B(6; 5)$, $C(5; -2)$?

127. Даны уравнения прямых $x+3y-10=0$, $3x+y-6=0$, на которых лежат боковые стороны равнобедренного треугольника. Составить уравнение прямой, на которой лежит третья сторона, если известно, что на ней находится точка $M(4; -2)$.

128. Дан треугольник с вершинами $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$, $C(1; -3)$. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки пересечения медиан, высот и биссектрис внутренних углов данного треугольника.

129. Через точку $M(4; -9)$ провести прямую, отсекающую от

прямых $4x-3y+7=0$, $3x+4y-1=0$ треугольник, площадь которого $S=12{,}5$.

130. Составить уравнение прямой, перпендикулярной прямой $5x-3y+2=0$ и отсекающей от двух прямых $x-3y+10=0$, $2x+y-8=0$ треугольник, площадь которого $S=7$.

131. Составить уравнение прямой, параллельной прямой $2x-y-5=0$ и отсекающей от прямых $x-y+1=0$, $x+y-1=0$ треугольник, площадь которого $S=3$.

132. Точки $B(3;-1)$, $C(-1;-5)$ являются вершинами равнобедренного треугольника, углы при которых равны. Написать уравнения прямых, на которых лежат его стороны, если известно, что площадь треугольника $S=16$.

133. Дана вершина $A(6;6)$ равнобедренного треугольника, уравнение прямой $x+y-2=0$, на которой лежит основание, и его площадь $S=20$. Составить уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника.

134. Даны точка $M(-1;2)$ пересечения медиан треугольника и уравнения прямых $x+2y-9=0$, $4x-y+18=0$, на которых лежат две его стороны. Найти координаты вершин и уравнение прямой, на которой лежит третья сторона треугольника.

135. Через точку $M(1;1)$ провести прямую, отрезок которой между прямыми $2x+7y-19=0$, $2x-3y-9=0$ в точке M делился бы пополам.

136. Даны уравнения прямых $x-y=0$, $6x-y=0$, на которых лежат две стороны треугольника и уравнение прямой $9x-4y=0$, на которой лежит одна из медиан. Составить уравнение прямой, на которой лежит третья сторона, если известно, что эта прямая проходит через точку $M(5;7{,}5)$.

137. Составить уравнения прямых, проходящих соответственно через точки $M(-7;0)$, $N(3;-2)$, если известно уравнение $x+3y-3=0$ одной из биссектрис угла между ними.

138. Составить уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника, если известна одна из его вершин $P(-1;-1)$ и уравнения прямых $2x-y-3=0$, $3x+y-2=0$, на которых лежат биссектрисы двух его внутренних углов.

139. Биссектрисы двух внутренних углов треугольника соответственно лежат на прямых $y+2=0$, $2x-y-6=0$; прямая $x-y-2=0$ проходит через его вершины, из которых выходят данные биссектрисы. Написать уравнения прямых, на которых лежат две другие стороны треугольника.

140. Две стороны и биссектриса одного из внутренних углов треугольника лежат соответственно на прямых $x+y=0$, $7x-y-8=0$, $2x-y+2=0$. Написать уравнение прямой, на которой лежит третья сторона треугольника.

141. Даны уравнения прямых $x-y=0$, $2x+y=0$, на которых лежат медианы треугольника, и одна из его вершин $P(6;0)$. Найти координаты двух других вершин и уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника.

142. Две стороны треугольника и одна из его медиан лежат соответственно на прямых $3x-4y-2=0$, $3x+y+8=0$, $2x-y-3=0$. Написать уравнение прямой, на которой лежит третья сторона.

143. Даны вершина треугольника $C(6; -1)$, угловой коэффициент $k=\frac{5}{3}$ противолежащей стороны и площадь треугольника $S=20$. Найти две другие вершины, если известно, что они принадлежат соответственно прямым $x+y+3=0$, $x-y+3=0$.

144. Даны уравнения прямых $x+2y-6=0$, $2x-y+3=0$, $x-3y+9=0$, на которых лежат медианы треугольника, и его площадь $S=30$. Найти координаты вершин треугольника.

145. Даны вершина треугольника B (6; 1) и уравнения прямых $8x-y-27=0$, $3x-y-7=0$, на которых лежат соответственно высота и биссектриса, проведенные из одной вершины. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника.

146. Одна из вершин треугольника находится в точке $A(2; 1)$, биссектриса и медиана, проведенные из различных вершин, лежат соответственно на прямых $2x-y-7=0$, $5x+y-23=0$. Составить уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника.

147. Биссектриса и медиана треугольника, проведенные из одной вершины, лежат соответственно на прямых $3x+y-9=0$, $5x+y-17=0$; другая вершина находится в точке $B(5; 4)$. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника.

148. Биссектрисы двух внутренних углов треугольника лежат на прямых $y-4=0$, $2x-y-8=0$, одна из вершин находится в точке $C(7; 1)$. Вычислить площадь треугольника.

149. Высота и медиана треугольника, проведенные из одной вершины, лежат соответственно на прямых $x-3y-3=0$, $4x-7y-2=0$; другая вершина находится в точке $B(3; 5)$. Вычислить площадь треугольника.

150. Даны вершина треугольника $C(4; -2)$ и уравнения прямых $8x+y-20=0$, $4x-7y-5=0$, на которых лежат соответственно высота и медиана, проведенные из различных вершин. Составить уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника.

151. Даны вершина треугольника $A(7; -1)$, уравнения прямых $2x-y-1=0$, $y-3=0$, на которых лежат соответственно высота и биссектриса, проведенные из различных вершин. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника.

152. Две медианы треугольника лежат соответственно на прямых $x+2y-1=0$, $x-y-4=0$, одна из его вершин находится в точке $B(3; 2)$. Составить уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника.

153. Две высоты треугольника лежат соответственно на пря-

мых $2x-y=0$, $3x-7y+16=0$, одна из его вершин находится в точке $C(5; -3)$. Написать уравнения прямых, на которых лежат стороны треугольника.

154. Составить уравнения прямых, на которых лежат стороны параллелограмма $ABCD$, если известно, что диагонали его пересекаются в точке $S(-1; 4)$, прямые (AB), (BC), (CD), (DA) проходят соответственно через точки $K(1; -2)$, $L(4; 4)$, $M(3; 7)$, $N(-7; 2)$.

155. Через точку $M(2; -1)$ провести прямые, образующие угол, тангенс которого равен $\frac{23}{15}$, и отсекающие от прямой $4x+3y-28=0$ отрезок длины 5.

Глава III. ЛИНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Линия называется *линией (кривой) второго порядка*, если она определяется уравнением второй степени относительно текущих координат x и y, т. е. уравнением вида

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0. \quad (1)$$

При соответствующем выборе системы прямоугольных декартовых координат уравнение линии второго порядка можно записать в простейшем виде.

§ 9. Окружность

Уравнение окружности радиусом R с центром в точке $N(a; b)$ имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (2)$$

Уравнение

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0 \ (A \neq 0) \quad (3)$$

после деления на A и выделения полных квадратов можно привести к виду

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = K. \quad (4)$$

Если $K > 0$, уравнение (4) определяет окружность радиусом $R = \sqrt{K}$, при $K = 0$ уравнению удовлетворяют координаты единственной точки $N(a; b)$, при $K < 0$ уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости.

Замечания: 1. Уравнение (3) получено из уравнения (1) при $B = A$ и $C = 0$ (это уравнение не содержит члена с произведением координат, коэффициенты при квадратах текущих координат равны между собой).

2. Если центр окружности радиусом R совпадает с началом координат, то ее уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Это простейшее уравнение окружности.

Пример 1. Даны две точки $M_1(-4; 5)$ и $M_2(2; -3)$. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок M_1M_2.

Чтобы написать уравнение окружности, необходимо знать ее радиус и координаты центра. В данном случае центром окружности является середина отрезка $[M_1M_2]$, а радиус равен половине длины этого отрезка.

Поскольку $N(-1; 1)$ — середина отрезка $[M_1M_2]$ и его длина $d = 10$, т. е. $R = 5$, то уравнение (2) принимает вид

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25.$$

Пример 2. Найти координаты центра и радиус окружности $x^2 + y^2 + 8x - 12y - 12 = 0$.

В левой части данного уравнения выделяем полные квадраты, прибавляя и вычитая соответствующие члены:

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 12y + 36) - 16 - 36 - 12 = 0; \quad (x+4)^2 + (y-6)^2 = 64.$$

Сравнивая последнее уравнение с уравнением (2), находим $a=-4$, $b=6$, $R=8$.

Пример 3. Какое множество точек плоскости определяет уравнение $4x^2+4y^2-24x+4y+37=0$?

Разделив обе части уравнения на 4, получим

$$x^2+y^2-6x+y+\frac{37}{4}=0.$$

Выделяя полные квадраты, находим уравнение

$$(x^2-6x+9)+\left(y^2+2\cdot\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\right)-9-\frac{1}{4}+\frac{37}{4}=0$$

или

$$(x-3)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=0.$$

Этому уравнению удовлетворяет лишь пара значений $x=3$, $y=-0{,}5$, т. е. координаты единственной точки $M(3;\ -0{,}5)$.

Пример 4. Составить уравнение окружности, касающейся оси Oy и проходящей через точки $M(8;\ 0)$ и $N(1;\ 7)$.

Так как окружность касается оси Oy и данные точки лежат в первой четверти, то $a=R$, поэтому уравнение окружности можно записать в виде

$$(x-R)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (I)$$

Найдем b и R из условия, что точки M и N принадлежат окружности. Подставляя координаты данных точек в уравнение (I), получаем

$$(8-R)^2+(0-b)^2=R^2;\ 64-16R+R^2+b^2=R^2;\ 64-16R+b^2=0;$$

$$(1-R)^2+(7-b)^2=R^2;\ 1-2R+R^2+49-14b+b^2=R^2,$$

$$50-14b-2R+b^2=0.$$

Решаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}64-16R+b^2&=0;\\ 50-2R+b^2-14b&=0.\end{aligned}\right\}$$

Почленно вычитая второе уравнение из первого, находим $14-14R+14b=0$ или $R=b+1$. Подставив это выражение для R в первое уравнение системы, получим квадратное уравнение $64-16(b+1)+b^2=0$, $b^2-16b+48=0$, для которого $b_1=4$, $b_2=12$. С помощью равенства $R=b+1$ находим $R_1=5$, $R_2=13$.

Подставляя соответственно значения b_1 и R_1, b_2 и R_2 в уравнение (I), находим искомые уравнения:

$$(x-5)^2+(y-4)^2=25;\ (x-13)^2+(y-12)^2=169.$$

Следовательно, задача имеет два решения. Через данные точки можно провести две окружности, касающиеся оси Oy (сделайте чертеж).

156. Написать уравнение окружности радиусом $R=10$ с центром в точке $C(3;\ -5)$. Исследовать взаимное расположение этой окружности и точек $K(-3;\ 3)$, $L(11;\ 1)$, $M(2;\ 4)$, $N(-5;\ 2)$.

157. Написать уравнение окружности радиусом $R=\sqrt{5}$ с центром в начале координат. Лежат ли на этой окружности точки $K(1;\ 1)$, $L(3;\ -1)$, $M(2;\ 1)$, $N(-1;\ 2)$?

158. Составить уравнение окружности с центром в точке $C(2; -3)$ и проходящей через точку $M(5; 1)$.

159. Составить уравнение окружности с центром в точке $C(2; 3)$ и касающейся прямой $5x+12y-20=0$.

160. Составить уравнение окружности радиусом $R=2\sqrt{5}$ и проходящей через точки $M(1; 1)$, $N(7; -1)$.

161. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $M(3; 4)$, $N(-1; -2)$, центр которой лежит на прямой $x+y-2=0$.

162. Составить уравнение окружности, проходящей через три точки $K(1; -1)$, $L(-1; -3)$, $M(3; -7)$.

163. Найти координаты центра и радиус каждой из окружностей: 1) $x^2+y^2-10y=0$; 2) $3x^2+3y^2+2x=0$; 3) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$; 4) $4x^2+4y^2-4x+12y+9=0$.

164. Какое множество точек плоскости определяет каждое из уравнений: 1) $x^2+y^2-2x+4y+6=0$; 2) $2x^2+2y^2+6x-2y+3=0$; 3) $4x^2+4y^2+8x-4y+9=0$; 4) $9x^2+9y^2+36x-6y+37=0$?

165. Составить уравнение окружности, касающейся осей координат и проходящей через данную точку M в каждом из следующих случаев: 1) $M(2; 1)$; 2) $M(2; -1)$; 3) $M(-1; 2)$; 4) $M(-1; -2)$.

166. Составить уравнение окружности, касающейся оси Ox и проходящей через данные точки M и N в каждом из следующих случаев: 1) $M(3; 2)$, $N(4; 1)$; 2) $M(-3; 2)$, $N(-4; 1)$; 3) $M(-3; -2)$, $N(-4; -1)$; 4) $M(3; -2)$, $N(4; -1)$.

167. Составить уравнение окружности, касающейся биссектрис координатных углов и проходящей через точку A в каждом из случаев: 1) $A(6; 2)$; 2) $A(3; 9)$; 3) $A(-6; 2)$; 4) $A(3; -9)$.

168. Исследовать взаимное расположение окружности $x^2+y^2-6x+2y+2=0$ с каждой из следующих прямых: 1) $x-y+3=0$; 2) $x+y-6=0$; 3) $x+y-1=0$.

169. Найти точки пересечения окружности $x^2+y^2-14x-10y+49=0$ и прямой $x+y-5=0$.

170. Найти точки пересечения окружностей $x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $x^2+y^2-10x-10y+25=0$.

171. Вычислить расстояние между центрами двух окружностей $x^2+y^2+14x+10y+49=0$, $x^2+y^2+6x+2y+9=0$.

172. Вычислить длину хорды, отсекаемой окружностью $x^2+y^2+6x+2y+9=0$ на прямой $x+y+5=0$.

173. Составить уравнение прямой, на которой лежит общая хорда двух окружностей $x^2+y^2+14x-10y+49=0$ и $x^2+y^2+6x-2y+9=0$.

174. Построить линии, определяемые уравнениями: 1) $y=+\sqrt{1-x^2}$; 2) $y=-\sqrt{4-x^2}$; 3) $x=+\sqrt{9-y^2}$; 4) $x=-\sqrt{25-y^2}$; 5) $y=1-\sqrt{9-x^2}$; 6) $y=-2+\sqrt{16-x^2}$; 7) $x=3+\sqrt{4-y^2}$; 8) $x=-3-\sqrt{16-y^2}$; 9) $y=2-\sqrt{16-(x-1)^2}$;

10) $y = 3 - \sqrt{25 - (x+1)^2}$; 11) $x = 4 - \sqrt{36 - (y+1)^2}$; 12) $x = -5 - \sqrt{49 - (y-3)^2}$.

175. Построить области, определяемые неравенствами: 1) $x^2 + y^2 - 25 < 0$, $y > 3$; 2) $x^2 + y^2 - 16 < 0$, $x < -1$; 3) $x^2 + y^2 < 1$, $x > 0$, $y > 0$; 4) $x^2 + y^2 < 4$, $x^2 + y^2 > 16$; 5) $x^2 + y^2 < 16$, $y > x$; 6) $x^2 + y^2 < 36$, $y < x$; 7) $x^2 + y^2 < 49$, $y > 2$, $x > 3$; 8) $x^2 + y^2 < 64$, $x < -2$, $y > 0$.

§ 10. Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) той же плоскости есть величина постоянная.

Каноническое (простейшее) уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{5}$$

где $a = |OA|$ — большая, $b = |OB|$ — малая полуось (рис. 9). Координаты фокусов $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$, где

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Эксцентриситетом эллипса называется отношение фокусного расстояния $2c$ к большой оси $2a$:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Расстояния точки $M(x;\ y)$ эллипса до фокусов *(фокальные радиусы)* определяются формулами

$$r_1 = a + \varepsilon x;\ r_2 = a - \varepsilon x. \tag{6}$$

Директрисами эллипса (5) называются прямые, определяемые уравнениями

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon},$$

где ε — эксцентриситет.

Диаметром эллипса называется хорда, проходящая через его центр — точку пересечения осей.

Пример 1. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса, определяемого уравнением $9x^2 + 16y^2 = 36$.

Разделив на 36 обе части уравнения, получим $\frac{x^2}{4} + \frac{4y^2}{9} = 1$ или

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (5), находим: $a^2 = 4, b^2 = \frac{9}{4}$,

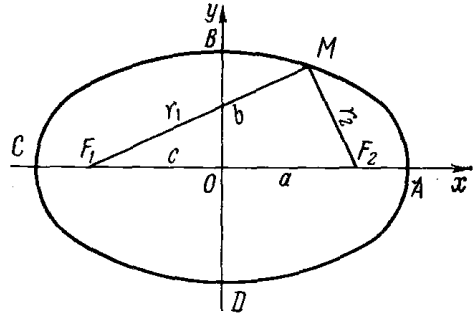


Рис. 9

$a = 2;\ b = \frac{3}{2};\ c^2 = a^2 - b^2 = 4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4},\ c = \frac{\sqrt{7}}{2};\ \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Таким образом, $a = 2,\ b = \frac{3}{2},\ F_1\left(-\frac{\sqrt{7}}{2};\ 0\right),\ F_2\left(\frac{\sqrt{7}}{2};\ 0\right),$ $\varepsilon = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Пример 2. Написать каноническое уравнение эллипса, симметричного относительно координатных осей и проходящего через точки $L(3;\ 1)$, $N(\sqrt{6};\ \sqrt{2})$.

Каноническое уравнение указанного эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Определим a^2 и b^2 из условия принадлежности эллипсу точек L и N. Подставляя координаты этих точек в данное уравнение, получаем

$$\frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1;\ \frac{6}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1.$$

Это линейная система двух уравнений относительно неизвестных $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$:

$$9 \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1,\ 6 \cdot \frac{1}{a^2} + 2 \cdot \frac{1}{b^2} = 1.$$

Умножая почленно первое уравнение на 2 и вычитая из полученного уравнения второе уравнение системы, находим $12 \cdot \frac{1}{a^2} = 1$, откуда $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{12}$ или $a^2 = 12$. Из первого уравнения получаем $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{4}$ или $b^2 = 4$.

Таким образом, получено искомое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Пример 3. Дан эллипс $x^2 + 3y^2 = 12$. Через точку $M\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

Уравнение прямой, отрезок которой является искомой хордой, в соответствии с формулой (9) гл. II запишем в виде $y - \frac{1}{2} = k\ (x - 2)$ или $y = kx - \left(2k - \frac{1}{2}\right)$, где k — коэффициент, подлежащий определению.

Для нахождения точек пересечения хорды с данным эллипсом необходимо решить систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} x^2 + 3y^2 &= 12; \\ y &= kx - \left(2k - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}\right\}$$

Подставив в первое уравнение выражение для y, определяемое вторым уравнением, получим

$$x^2+3\left[k^2x^2-2k\left(2k-\frac{1}{2}\right)x+\left(2k-\frac{1}{2}\right)^2\right]=12;$$

$$(1+3k^2)\,x^2-(12k^2-3k)\,x+\left(12k^2-6k-\frac{45}{4}\right)=0.$$

Это квадратное уравнение относительно x можно переписать так:

$$x^2-\frac{12k^2-3k}{1+3k^2}\,x+\frac{48k^2-24k-45}{4(1+3k^2)}=0.$$

Обозначая через x_1 и x_2 корни полученного квадратного уравнения, по теореме Виета находим

$$x_1+x_2=\frac{12k^2-3k}{1+3k^2}.$$

С другой стороны, так как $M(2;\ 1/2)$ — середина хорды, то в соответствии с формулами (3) гл. I имеем

$$\frac{x_1+x_2}{2}=2 \text{ или } x_1+x_2=4.$$

Следовательно,

$$\frac{12k^2-3k}{1+3k^2}=4.$$

откуда $k=-\frac{4}{3}$.

Подставив найденное значение k в уравнение хорды, получим

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{4}{3}(x-2);\ 8x+6y-19=0.$$

Пример 4. Доказать, что отношение расстояния любой точки эллипса до фокуса к расстоянию этой точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная ε.

Пусть $M(x;\ y)$ — произвольная точка эллипса (рис. 10). Расстояние $d_2=|MN|$ точки M до директрисы $x=\frac{a}{\varepsilon}$ выразится формулой $d_2=\frac{a}{\varepsilon}-x$. Расстояние этой точки до фокуса определяется формулой (6): $r_2=a-\varepsilon x$.

Отношение

$$\frac{r_2}{d_2}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

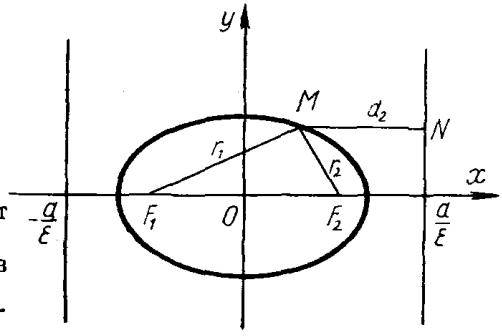


Рис 10

Пример 5. Найти эксцентриситет и директрисы эллипса $x^2+2y^2=8$.

Напишем это уравнение эллипса в виде $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$. Сравнивая полученное уравнение с каноническим уравнением (5), находим: $a^2=8$, $b^2=4$,

т. е. $a = 2\sqrt{2}$, $b = 2$. Поскольку $c^2 = a^2 - b^2$, то $c^2 = 4$, $c = 2$. Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Уравнения директрис $x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{c}$ принимают вид $x = \pm 4$.

176. Написать каноническое уравнение эллипса, если известно, что: 1) его полуоси соответственно равны 8 и 5; 2) оси соответственно равны $4\sqrt{5}$ и $2\sqrt{7}$; 3) расстояние между фокусами равно 10 и малая ось 24; 4) большая ось равна 10 и расстояние между фокусами 6.

177. Написать каноническое уравнение эллипса по следующим данным: 1) большая полуось равна 10 и эксцентриситет 0,6; 2) малая полуось равна 5 и эксцентриситет $\frac{12}{13}$; 3) эксцентриситет равен 0,8, расстояние между фокусами 8; 4) сумма полуосей и расстояние между фокусами равны 15.

178. Составить уравнение множества точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до точек $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$ равна 12. Принадлежат ли этому множеству точки $K(6; 0)$, $L(1; 2)$, $N(7; 4)$, $M(0; 2\sqrt{5})$?

179. Составить каноническое уравнение эллипса, симметричного относительно координатных осей и проходящего через точки $M(3; -2)$, $N(3\sqrt{1{,}5}; \sqrt{2})$.

180. Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситеты эллипсов, заданных уравнениями: 1) $x^2+4y^2=16$; 2) $x^2+9y^2=81$; 3) $x^2+2y^2=4$; 4) $3x^2+5y^2=12$; 5) $4x^2+y^2=16$; 6) $5x^2+4y^2=20$.

181. Дан эксцентриситет эллипса ε. Найти отношение его полуосей. Как форма эллипса зависит от величины эксцентриситета?

182. Известно, что прямая $2x - 3y + 12 = 0$ касается эллипса $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$. Найти точку касания.

183. Сколько касательных можно провести к эллипсу $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ из точки M: 1) M (3; 0); 2) M (2; 1); 3) M (4; 2)?

184. Написать уравнения директрис эллипса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$.

185. Найти длину диаметра эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$, направленного по биссектрисе второго координатного угла.

186. Вычислить расстояние между директрисами эллипса $x^2+2y^2=8$.

187. Найти уравнение эллипса, расстояние между фокусами которого равно 4 и расстояние между директрисами 16.

188. Дан эллипс $x^2+2y^2=8$. Через точку $M(1;\ 1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

189. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по сторонам прямого угла. Какую кривую описывает любая точка M, лежащая на этом отрезке?

190. Земля движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Наименьшее расстояние от Земли до Солнца равно приблизительно 147 500 000, а наибольше—152 500 000 км. Найти большую полуось и эксцентриситет орбиты Земли.

191. Эллипс, симметричный относительно осей координат, фокусы которого находятся на оси Ox, проходит через точку $M(4;\ -1{,}8)$ и имеет эксцентриситет $\varepsilon=\frac{4}{5}$. Написать уравнение эллипса и найти фокальные радиусы точки M.

192. Ординаты всех точек окружности $x^2+y^2=4$ уменьшены вдвое. Написать уравнение полученной новой кривой.

193. Найти траекторию точки M, которая при своем движении остается вдвое ближе к точке $N(2;\ 0)$, чем к прямой $x=8$.

194. Найти точки пересечения эллипса $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ и прямой $2x-3y=0$.

195. Вычислить длину диаметра эллипса $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}=1$, параллельного прямой $6x-4y-1=0$.

196. Найти точки пересечения окружности $x^2+y^2=4$ и эллипса $x^2+25y^2=25$.

197. Найти точки пересечения эллипсов $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ и $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

198. Составить уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ в точке $M(2;\ -3)$.

199. Построить линии, определяемые уравнениями: 1) $y=4\sqrt{1-x^2}$; 2) $y=-3\sqrt{1-x^2}$; 3) $x=5\sqrt{1-y^2}$; 4) $x=-2\sqrt{1-y^2}$; 5) $y=-\frac{4}{3}\sqrt{9-x^2}$; 6) $y=\frac{5}{4}\sqrt{16-x^2}$.

200. Изобразить на чертеже области, определяемые неравенствами: 1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}<1,\ x>2$; 2) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}<1,\ y<-1$;

3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}>1$, $x^2+y^2<25$; 4) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}<1$, $y>x$;
5) $x^2+4y^2<4$, $2y<x$; 6) $9x^2+y^2<9$, $x>0$, $y>0$.

201. Найти эксцентриситет эллипса, если известно, что в него можно вписать равносторонний треугольник, одна из вершин которого совпадает с концом большой оси эллипса, а противолежащая ей сторона проходит через один из фокусов.

202. Доказать, что длина отрезка, соединяющего центр эллипса с произвольной его точкой, заключена между длинами малой и большой полуоси.

§ 11. Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек *(фокусов)* той же плоскости есть величина постоянная.

Каноническое (простейшее) уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{7}$$

где $a=|OA|$ — действительная; $b=|OB|$ — мнимая полуось (рис. 11).

Координаты фокусов гиперболы (7) $x_1=-c$, $y_1=0$, $x_2=c$, $y_2=0$, т. е. $F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$, где

$$c=\sqrt{a^2+b^2}. \tag{8}$$

Эксцентриситетом гиперболы (7) называется отношение фокусного расстояния $2c$ к действительной оси $2a$:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}. \tag{9}$$

Асимптотами гиперболы (7) называются прямые, определяемые уравнениями

$$y=\frac{b}{a}x;\quad y=-\frac{b}{a}x; \tag{10}$$

на этих прямых лежат диагонали *характеристического прямоугольника,* основание которого равно $2a$, высота $2b$, а центр находится в начале координат (рис. 11).

Директрисами гиперболы (7) называются прямые, определяемые уравнениями

$$x=-\frac{a}{\varepsilon};\quad x=\frac{a}{\varepsilon},$$

где a — действительная полуось; ε — эксцентриситет.

Уравнение

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{11}$$

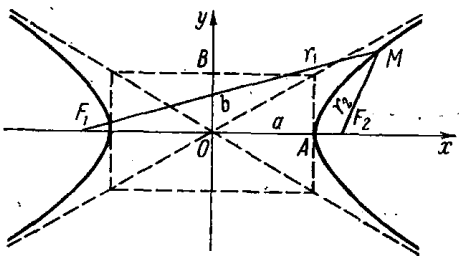


Рис. 11

определяет гиперболу, симметричную относительно координатных осей; ее ветви пересекают ось Oy, а фокусы лежат также на оси Oy.

Две гиперболы, определяемые уравнениями $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в одной и той же системе координат, называются *сопряженными*.

Гипербола с равными полуосями ($a = b$) называется *равносторонней*; ее каноническое уравнение имеет вид $x^2 - y^2 = a^2$ или $-x^2 + y^2 = a^2$.

Уравнения асимптот равносторонней гиперболы: $y = x$; $y = -x$.

Фокальные радиусы точки правой ветви гиперболы (7) вычисляются по формулам

$$r_1 = \varepsilon x + a;\ r_2 = \varepsilon x - a, \tag{12}$$

фокальные радиусы точки левой ветви — по формулам

$$r_1 = -\varepsilon x - a;\ r_2 = -\varepsilon x + a. \tag{13}$$

Замечание. Если гипербола задана уравнением (11), то ее директрисы определяются уравнениями

$$y = -\frac{b}{\varepsilon};\ y = \frac{b}{\varepsilon}. \tag{14}$$

Пример 1. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис гиперболы $25x^2 - 144y^2 = 3600$.

Приведя данное уравнение к каноническому виду (для чего обе части его нужно разделить на 3600), получим

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (7), заключаем, что $a^2 = 144$, $b^2 = 25$; следовательно, $a = 12$ — действительная полуось, $b = 5$ — мнимая. По формуле (8) находим $c = \sqrt{144 + 25} = 13$. Таким образом, $F_1(-13;\ 0)$, $F_2(13;\ 0)$, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{13}{12}$.

В соответствии с формулами (10) находим уравнения асимптот:

$$y = \frac{5}{12}x;\ y = -\frac{5}{12}x.$$

Подставив значения a и ε в соответствующие уравнения, получим:

$$x = -\frac{144}{13};\ x = \frac{144}{13}.$$

Пример 2. Составить уравнение гиперболы, симметричной относительно координатных осей, пересекающей ось Ox и проходящей через две точки $M\left(2\sqrt{6};\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $N\left(\frac{8\sqrt{3}}{3};\ \frac{3}{\sqrt{3}}\right)$.

Уравнение указанной гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Подставляя в это уравнение координаты точек M и N, получаем:

$$\frac{24}{a^2}-\frac{9}{2b^2}=1;\ \frac{64}{3a^2}-\frac{9}{3b^2}=1.$$

Решая эти уравнения, находим $a^2=16$, $b^2=9$. Следовательно, получено искомое уравнение:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Пример 3. Дано уравнение гиперболы $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$. Вычислить фокальные радиусы точек $L(4;\ 6)$ и $N(-5;\ 3\sqrt{7})$. На данной гиперболе найти точку, расстояние которой до правого фокуса равно 16.

Поскольку для точки L $x=4>0$, то она принадлежит правой ветви гиперболы; ее фокальные радиусы вычисляются по формулам (12). Так как точка N лежит на левой ветви гиперболы (ее координата x отрицательна), то ее фокальные радиусы вычисляются по формулам (13).

В формулы (12) и (13) входят длина действительной полуоси и эксцентриситет. Определим a и ε. Сравнивая уравнение данной гиперболы с уравнением (7), находим: $a^2=4$, $b^2=12$, т. е. $a=2$, $b=2\sqrt{3}$. По формуле (8) вычисляем $c=\sqrt{4+12}=4$, а по формуле (9) находим $\varepsilon=\frac{4}{2}=2$.

Вычисляем фокальные радиусы точки L: $r_1=\varepsilon x+a=2\cdot 4+2=10$, $r_2=\varepsilon x-a=2\cdot 4-2=6$ и фокальные радиусы точки N: $r_1=-\varepsilon x-a=-2(-5)-2=8$, $r_2=-\varepsilon x+a=-2(-5)+2=12$.

Отметим, что, как и следовало ожидать, $|r_1-r_2|=|10-6|=4$ (для точки L) и $|r_1-r_2|=|8-12|=4$ (для точки N).

Найдем точку $M(x;\ y)$ гиперболы, расстояние которой до правого фокуса равно 16. Это расстояние определяется выражениями для r_2 в формулах (12) и (13): 1) $r_2=\varepsilon x-a$, $16=2x-2$, $2x=18$, $x=9$, $\frac{81}{4}-\frac{y^2}{12}=1$, $\frac{y^2}{12}=\frac{81}{4}-1=\frac{77}{4}$, $y=\pm\sqrt{221}$; 2) $r_2=-\varepsilon x+a$, $16=-2x+2$, $2x=2-16$, $x=-7$, $\frac{49}{4}-\frac{y^2}{12}=1$, $\frac{y^2}{12}=\frac{49}{4}-1=\frac{45}{4}$, $y=\pm 3\sqrt{15}$.

Следовательно, условию задачи удовлетворяют четыре точки: $M_1(9;\ \sqrt{221})$, $M_2(9;\ -\sqrt{221})$, $M_3(-7;\ 3\sqrt{15})$, $M_4(-7;\ -3\sqrt{15})$.

203. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, если: 1) расстояние между фокусами равно 14, расстояние между вершинами 6; 2) действительная ось равна 16, эксцентриситет 1,5; 3) мнимая ось равна $4\sqrt{3}$, гипербола проходит через точку $N(4;\ -6)$; 4) действительная ось равна $4\sqrt{3}$, гипербола проходит через точку $N(-6;\ 4)$.

204. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси Oy симметрично относительно начала координат, если: 1) расстояние между фокусами равно 10, расстояние между вершинами 8; 2) расстояние между фокусами равно 16, эксцентриситет 2; 3) действительная ось равна $4\sqrt{2}$,

гипербола проходит через точку $N(-2; 4)$; 4) мнимая ось равна $4\sqrt{3}$, гипербола проходит через точку $N(6; -4)$.

205. Написать уравнение множества всех точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух точек $F_1(-13; 0)$, $F_2(13; 0)$ равен 10.

206. Написать уравнение множества всех точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух точек $F_1(0; -5)$, $F_2(0; 5)$ равен 6.

207. Найти длины полуосей, координаты фокусов и эксцентриситеты гипербол, заданных уравнениями: 1) $x^2 - 2y^2 = 8$; 2) $3y^2 - x^2 = 12$; 3) $3x^2 - 4y^2 = 12$; 4) $4y^2 - 5x^2 = 20$; 5) $144x^2 - 25y^2 = 3600$; 6) $9y^2 - 16x^2 = 144$.

208. Построить линии, заданные уравнениями: 1) $x^2 - 4y^2 = 16$; 2) $4x^2 - y^2 = 16$; 3) $x^2 - 9y^2 = 9$; 4) $9y^2 - 16x^2 = 144$; 5) $4y^2 - 9x^2 = 36$; 6) $5y^2 - 3x^2 = 15$.

209. На гиперболе $16x^2 - 9y^2 = 144$ взята точка, абсцисса которой равна 6. Вычислить фокальные радиусы этой точки. Найти точку гиперболы, расстояние которой до левого фокуса равно 18.

210. Дан эллипс $3x^2 + 4y^2 = 48$. Составить уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы — в вершинах данного эллипса.

211. Найти зависимость между эксцентриситетом гиперболы и углом между ее асимптотами. Как влияет величина эксцентриситета на форму гиперболы?

212. Составить уравнение гиперболы, если известно, что расстояние между ее директрисами равно 6, а расстояние между фокусами — 20.

213. Найти эксцентриситет гиперболы, если известно, что расстояние между ее директрисами в девять раз меньше расстояния между фокусами.

214. Найти угол между асимптотами гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$.

215. Составить уравнение гиперболы, если известно, что асимптоты даны уравнениями $3x - 4y = 0$, $3x + 4y = 0$ и расстояние между фокусами равно 20.

216. Исследовать взаимное расположение гиперболы $2x^2 - 5y^2 = 30$ с каждой из следующих прямых: 1) $2x - y + 1 = 0$; 2) $x - y - 3 = 0$; 3) $x - 5y - 1 = 0$.

217. Найти точки пересечения гиперболы $2x^2 - 9y^2 = 36$ и прямой $x - 3y = 0$.

218. Вычислить длину диаметра гиперболы $2y^2 - 9x^2 = 36$, параллельного прямой $6x - 2y + 1 = 0$.

219. Найти точки пересечения эллипса $3x^2 + 4y^2 = 48$ и гиперболы $3x^2 - y^2 = 12$.

220. Найти точки пересечения двух гипербол $3x^2 - 4y^2 = 12$, $9x^2 - 8y^2 = 72$.

221. Вычислить периметр и площадь прямоугольника, вершины которого находятся в точках пересечения двух гипербол $3x^2 - y^2 = 12$, $2y^2 - 3x^2 = 24$.

222. Вычислить длину диагонали прямоугольника, вершины которого находятся в точках пересечения гиперболы $3x^2 - 4y^2 = 12$ и окружности $x^2 + y^2 = 25$.

223. Составить уравнение касательной к гиперболе $3x^2 - 4y^2 = 12$ в точке $M(-4; 3)$.

224. Составить уравнение касательной к гиперболе $8x^2 - 3y^2 = 24$, проходящей через точку $M(-1; -4)$.

225. Построить линии, определяемые уравнениями: 1) $y = \sqrt{x^2 - 16}$; 2) $y = -\sqrt{x^2 - 1}$; 3) $y = -\sqrt{x^2 + 25}$; 4) $x = 2\sqrt{y^2 + 4}$; 5) $x = \frac{2}{3}\sqrt{y^2 - 9}$; 6) $x = -\frac{3}{4}\sqrt{y^2 - 16}$.

226. Изобразить на чертеже области, определяемые неравенствами: 1) $x^2 - y^2 > 9$, $x > 0$, $y > 0$; 2) $y^2 - x^2 > 9$, $x < 0$, $y < 0$; 3) $x^2 - y^2 > 4$, $x^2 + y^2 < 16$; 4) $x^2 - y^2 < 4$, $x^2 + y^2 < 16$; 5) $x^2 - y^2 > 9$, $3 < x < 5$; 6) $y^2 - x^2 > 1$, $1 < y < 3$; 7) $3x^2 + 4y^2 < 48$, $3x^2 - y^2 < 12$; 8) $3x^2 - 4y^2 > 12$, $9x^2 - 8y^2 < 72$.

227. Доказать, что отношение расстояния любой точки гиперболы до фокуса к расстоянию этой точки до соответствующей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету.

228. Доказать, что отрезок, соединяющий произвольную точку гиперболы с ее фокусом, равен отрезку прямой, параллельной асимптоте гиперболы, заключенному между рассматриваемой точкой и директрисой, соответствующей взятому фокусу.

§ 12. Парабола

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы), лежащих в той же плоскости.

Каноническое (простейшее) уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через начало координат (рис. 12), имеет вид

$$y^2 = 2px. \tag{15}$$

Уравнение директрисы параболы (15):

$$x = -\frac{p}{2}. \tag{16}$$

Парабола, определяемая уравнением (15), имеет фокус $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, соответствующие ординаты точек параболы равны $\pm p$; парабола проходит через точки $O(0, 0)$, $P\left(\frac{p}{2}; p\right)$, $Q\left(\frac{p}{2}; -p\right)$. Фокальный радиус точки $M(x; y)$ этой параболы вычисляется по формуле

$$r = x + \frac{p}{2}. \tag{17}$$

Парабола, симметричная относительно оси Oy и проходящая через начало координат (рис. 13), определяется уравнением

$$x^2 = 2qy. \tag{18}$$

Фокус параболы (18) находится в точке $F\left(0;\ \frac{q}{2}\right)$, уравнение ее директрисы имеет вид

$$y = -\frac{q}{2},$$

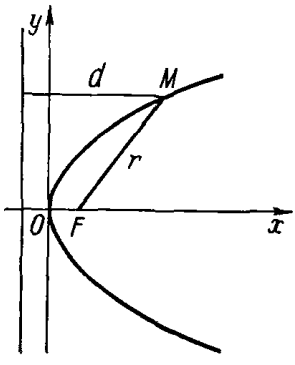


Рис. 12

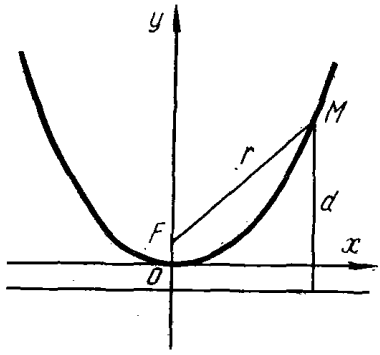


Рис. 13

фокальный радиус ее точки $M(x;\ y)$ выражается формулой

$$r = y + \frac{q}{2}.$$

Замечания: 1. Уравнение $y^2 = -2px\ (p>0)$ определяет параболу, симметричную относительно оси Ox, проходящую через начало координат и целиком расположенную слева от оси Oy (рис. 14, *а*).

2. Уравнение $x^2 = -2qy\ (q>0)$ определяет параболу, изображенную на рис. 14, *б*.

Пример 1. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = 16x$. Вычислить расстояние точки $M(1;\ 4)$ до фокуса.

а *б*

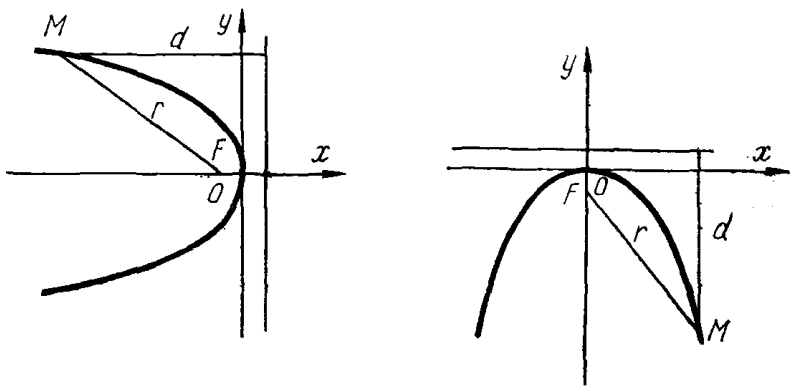


Рис 14

Сравнивая уравнение $y^2=16x$ с уравнением (15), находим, что $2p=16$, откуда $p=8$, $\frac{p}{2}=4$. В соответствии с формулой (16) получаем уравнение $x=-4$ директрисы параболы, фокус параболы находится в точке $F(4;\ 0)$. Точка $M(1;\ 4)$ лежит на параболе, так как ее координаты удовлетворяют уравнению $y^2=16x$. По формуле (17) находим фокальный радиус точки M: $r=1+4=5$.

Пример 2. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $x^2=4y$. Вычислить расстояние точки $M(6;\ 9)$ до фокуса.

Сравнивая уравнение $x^2=4y$ с уравнением (18), получаем $2q=4$, откуда $q=2$, $\frac{q}{2}=1$. Следовательно, фокус параболы находится в точке $F(0;\ 1)$, уравнение директрисы имеет вид $y=-1$, а фокальный радиус точки M $r=9+1=10$.

Пример 3. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точки M $(5;\ 4)$, $N(15;\ -6)$.

Так как парабола симметрична относительно оси Ox, то в ее уравнение y входит только во второй степени. Уравнение этой параболы имеет вид

$$y^2=2px+c,$$

где p и c — некоторые постоянные. Найдем p и c, использовав условие задачи. Поскольку точки M и N лежат на параболе, то их координаты должны удовлетворять ее уравнению:

$$4^2=2p\cdot 5+c;\ (-6)^2=2p\cdot 15+c.$$

Из уравнений $16=10p+c$, $36=30p+c$ находим $p=1$, $c=6$.

Таким образом, данная парабола определяется уравнением

$$y^2=2x+6 \text{ или } y^2=2(x+3).$$

Замечание. Уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox, имеет вид

$$y^2=2p(x-a).$$

Парабола, симметричная относительно оси Oy, определяется уравнением

$$x^2=2q(y-b).$$

Пример 4. Найти точки пересечения гиперболы $3x^2-y^2=12$ и параболы $y^2=9x$.

Решим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}3x^2-y^2&=12;\\ y^2-9x&=0.\end{aligned}\right\}$$

Сложив почленно эти уравнения, получим квадратное уравнение относительно x

$$3x^2-9x=12 \text{ или } x^2-3x-4=0.$$

Это уравнение имеет корни $x_1=-1$, $x_2=4$. Первый корень условию задачи не удовлетворяет (точка с абсциссой $x_1=-1$ на параболе не лежит). Подставляя значение $x_2=4$ в любое из двух уравнений системы, находим $y=\pm 6$. Следовательно, данные линии пересекаются в двух точках $M(4;\ 6)$, $N(4;\ -6)$.

229. Написать уравнение параболы по следующим данным: 1) парабола симметрична относительно оси Ox, проходит через точку $N(4;\ 6)$ и начало координат; 2) парабола симметрична относительно оси Oy, проходит через точку $N(2;\ -1)$ и начало координат.

230. Составить уравнение множества всех точек, одинаково удаленных от точки $F(3; 0)$ и прямой $x=-5$. Определить точки пересечения этой кривой с осями координат.

231. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точки $M(3; -4)$, $N(9; -8)$.

232. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точки $M(-3; 4)$, $N(-6; 7)$.

233. Составить уравнение параболы, зная, что: 1) фокус находится в точке $F(5; 0)$, директриса будет осью ординат, а ось симметрии — осью абсцисс; 2) фокус находится в точке $F(0; 5)$, директриса служит осью абсцисс, а ось симметрии — осью ординат.

234. Найти координаты фокусов и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением: 1) $y^2=6x$; 2) $y^2=-6x$; 3) $x^2=4y$; 4) $x^2=-4y$.

235. На параболе $y^2=16x$ найти точку, фокальный радиус которой равен 5.

236. Написать уравнение параболы, зная, что вершина ее лежит в начале координат, направление оси симметрии совпадает с отрицательным направлением оси Oy, а параметр p равен расстоянию от фокусов гиперболы $9x^2-4y^2-36=0$ до асимптот.

237. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, направление оси симметрии совпадает с отрицательным направлением оси Ox, а параметр p равен расстоянию между директрисами эллипса $3x^2+4y^2-48=0$.

238. Вычислить длину хорды, проходящей через фокус параболы $y^2=10x$ и перпендикулярной к ее оси симметрии.

239. Найти точки пересечения параболы $x^2=4y$ и прямой $4x-4y-3=0$.

240. Написать уравнение касательной к параболе $y^2=12x$ в точке $N(3; 6)$.

241. Дана парабола $x^2=16y$. Через точку $N(2; \frac{5}{2})$ провести хорду, делящуюся в ней пополам.

242. Написать уравнения касательных к параболе $y^2=4x$, проходящих через точку $N(3; -4)$.

243. Дана парабола $x^2=4y$. Вычислить длину ее хорды, проходящей через точку $N(2; 3)$ и параллельной прямой $x-2y+5=0$.

244. Осевое сечение зеркала прожектора имеет форму параболы. Определить положение фокуса, если диаметр зеркала 80 см, а глубина его 40 см.

245. Составить уравнение параболы и ее директрисы, если парабола проходит через точку пересечения прямой $y-x=0$ с окружностью $x^2+y^2-8x=0$ и симметрична относительно оси Ox.

246. Найти точки пересечения окружности $x^2+y^2=25$ с каждой из следующих парабол: 1) $3y^2=16x$; 2) $x^2=9(y-3)$.

247. Вычислить площадь треугольника, две вершины которого находятся в точках пересечения окружности $x^2+y^2=25$ и параболы $y^2=8(x-1)$, а третья — в начале координат.

248. Найти точки пересечения эллипса $x^2+4y^2=8$ и параболы $x^2=4y$.

249. Составить уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок между точками пересечения эллипса $x^2+2y^2=6$ и параболы $2y^2-x=0$.

250. Найти точки пересечения гиперболы $2x^2-5y^2=30$ и параболы $5y^2-4x=0$.

251. Вычислить длину отрезка между точками пересечения гиперболы $2y^2-3x^2=24$ и параболы $3x^2-8y=0$.

252. Найти точки пересечения двух парабол $x^2=4y$ и $2y^2-x=0$.

253. Построить линии, определяемые уравнениями: 1) $y=\sqrt{x}$; 2) $y=-\sqrt{x+3}$; 3) $x=-\sqrt{y}$; 4) $x=\sqrt{y-1}$; 5) $y=2\sqrt{x-1}$; 6) $y=-3\sqrt{x+2}$; 7) $x=3\sqrt{y-3}$; 8) $x=-4\sqrt{y+5}$.

254. Изобразить на чертеже области, определяемые неравенствами: 1) $x^2-4y\leqslant 0$, $y\leqslant 3$; 2) $y^2-6x<0$, $x<5$; 3) $x^2-9y<0$, $2<y<4$; 4) $x^2+y^2<25$, $16x-3y^2>0$; 5) $x^2+2y^2<8$, $x-2y^2>0$; 6) $2x^2-5y^2>0$, $5y^2-4x<0$; 7) $4y-x^2>0$, $x-2y^2>0$.

255. Доказать, что любая касательная к параболе образует с осью параболы и фокальным радиусом точки касания равные углы.

256. Доказать, что если две параболы со взаимно перпендикулярными осями пересекаются в четырех точках, то эти точки лежат на некоторой окружности.

257. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точки пересечения двух парабол $x^2=y+5$, $y^2=2x+10$.

258. Доказать, что произведение абсцисс концов любой хорды, проходящей через фокус параболы $x^2=2qy$, есть величина постоянная.

§ 13. Преобразование уравнения второй степени при параллельном переносе системы прямоугольных координат

Рассмотрим уравнение второй степени относительно прямоугольных декартовых координат, не содержащее члена с произведением xy, т. е. уравнение

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \tag{19}$$

Перейдем к новой системе координат O_1XY, полученной из исходной путем параллельного переноса (рис. 15) начала в точку $O_1(x_0; y_0)$, при котором старые координаты $(x; y)$ точки M выражаются через ее новые координаты $(X; Y)$ по следующим формулам:

$$x=X+x_0,\quad y=Y+y_0.$$

Уравнение (19) выделением полных квадратов может быть приведено к одному из следующих канонических уравнений:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1; \tag{20}$$

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0; \tag{21}$$

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=-1 \tag{22}$$

в случае $AC>0$ *(линии эллиптического типа)*;

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1;\quad -\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1; \tag{23}$$

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0 \tag{24}$$

в случае $AC<0$ *(линии гиперболического типа)*;

$$Y^2=2pX; \tag{25}$$

$$Y^2=b^2; \tag{26}$$

$$Y^2=0; \tag{27}$$

$$Y^2=-b^2 \tag{28}$$

в случае $AC=0$ *(линии параболического типа)*, $A=0$.

Замечания: 1. Если $C=0$, уравнение (19) приводится к одному из следующих канонических уравнений:

$$X^2=2qY;\ X^2=a^2;\ X^2=0;\ X^2=-a^2.$$

2. Уравнение (20) определяет эллипс, уравнения (23)—гиперболы (с действительной осью O_1X или O_1Y), уравнение (25) — параболу (с осью O_1Y), уравнения (24) — пару пересекающихся прямых $bX-aY=0$, $bX+aY=0$, уравнения (26) — пару параллельных прямых $Y=b$, $Y=-b$, уравнения (27) — пару совпавших прямых $Y=0$, $Y=0$, уравнению (21) удовлетворяют координаты единственной точки $X=0$, $Y=0$, уравнениям (22) и (28) не удовлетворяют координаты ни одной точки.

Пример 1. Построить линию, определяемую уравнением $9x^2+25y^2-36x-50y-164=0$.

Это уравнение не содержит члена с произведением текущих координат, его можно привести к каноническому виду с помощью преобразования параллельного переноса.

Выделяем полные квадраты в левой части уравнения, предварительно вынося за скобки коэффициенты при квадратах координат:

$$9(x^2-4x+4)+25(y^2-2y+1)-36-25-164=0;$$

$$9(x-2)^2+25(y-1)^2=225.$$

Разделив почленно последнее уравнение на 225, получим уравнение

$$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{9}=1. \tag{I}$$

Перейдем к новой системе координат O_1XY, полученной из старой путем параллельного переноса начала в точку $O_1(2;\ 1)$. Формулы, связывающие при этом преобразовании новые и старые координаты, имеют вид

$$X = x - 2;\ Y = y - 1.$$

Уравнение (I) в новых координатах запишется так:

$$\frac{X^2}{25} + \frac{Y^2}{9} = 1. \qquad (II)$$

Оно определяет эллипс с полуосями $a=5$, $b=3$. Строим старые и новые координатные оси и эллипс, заданный уравнением (II), относительно новой систе-

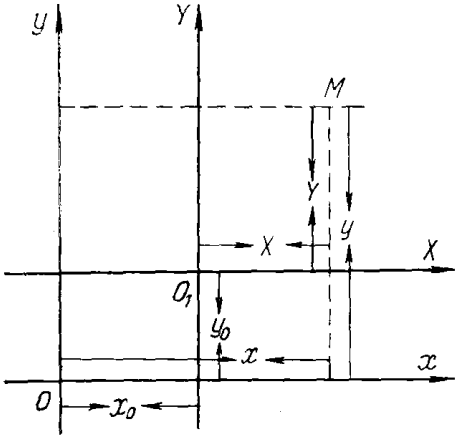


Рис. 15

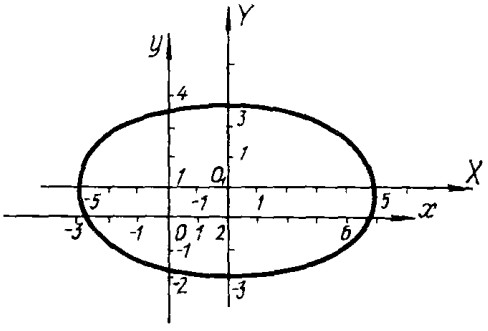


Рис. 16

мы координат (рис. 16). Тем самым построена линия, заданная исходным уравнением, в старой системе координат.

Пример 2. Определить вид, параметры и расположение относительно системы координат линии, заданной уравнением $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$.

Преобразуем данное уравнение:

$$9(x^2 - 2x + 1) - 16(y^2 + 4y + 4) - 9 + 64 - 199 = 0;$$

$$9(x-1)^2 - 16(y+2)^2 = 144;$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1.$$

Перейдем к новой системе координат по формулам $X=x-1$, $Y=y+2$, тогда

$$\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{9} = 1.$$

Последнее уравнение определяет гиперболу, параметры которой $a=4$ (действительная полуось), $b=3$ (мнимая полуось); гипербола пересекает ось O_1X. Центр гиперболы находится в точке, для которой $X=0$, $Y=0$, т. е. $x-1=0$, $y+2=0$, откуда $x=1$, $y=-2$. Эта точка совпадает с точкой $O_1(1;\ -2)$ — началом новой системы координат (рис. 17).

Пример 3. Определить вид, параметры и расположение линии, заданной уравнением $9y^2-4x^2+18y+8x-31=0$.

Преобразуем это уравнение:

$$9(y^2+2y+1)-4(x^2-2x+1)-9+4-31=0;$$

$$9(y+1)^2-4(x-1)^2=36;$$

$$\frac{(y+1)^2}{4}-\frac{(x-1)^2}{9}=1;\quad -\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1.$$

В новой системе координат $X=x-1$, $Y=y+1$ уравнение принимает вид

$$-\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=1.$$

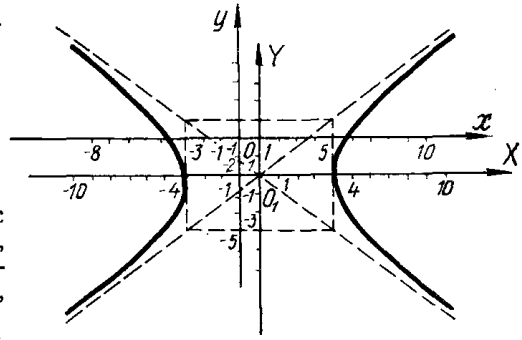


Рис. 17

Оно определяет гиперболу с действительной осью O_1Y (рис. 18), центр гиперболы находится в точке O_1 (1; —1), параметры $b=2$, $a=3$.

Пример 4. Определить вид, параметры и расположение линии, заданной уравнением $2x^2-4x-y-1=0$.

Преобразуем данное уравнение:

$$2(x^2-2x+1)-y-2-1=0;\ 2(x-1)^2=y+3. \qquad (I)$$

Перейдем к новой системе координат по формулам

$$X=x-1;\ Y=y+3. \qquad (II)$$

Тогда уравнение (I) примет вид

$$2X^2=Y;\ X^2=\frac{1}{2}Y. \qquad (III)$$

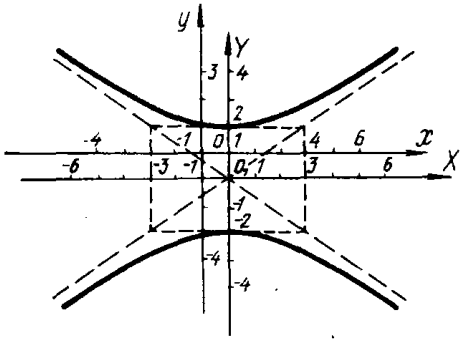


Рис. 18

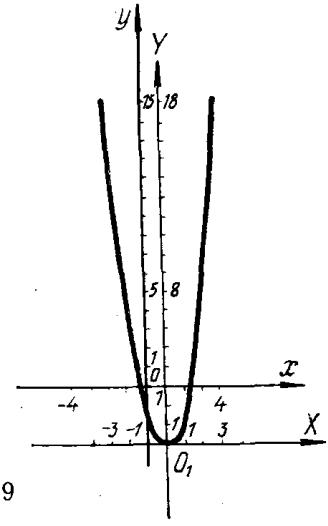


Рис. 19

Уравнение (III) определяет параболу, симметричную относительно оси O_1Y (рис. 19), вершина параболы находится в точке $O_1(1; -3)$, параметр $p=\frac{1}{4}$.

Замечание. Координаты вершины параболы находятся из формул (II): $X=0$, $Y=0$, $x-1=0$, $y+3=0$, $x=1$, $y=-3$.

Пример 5. Определить вид, параметры и расположение линии, заданной уравнением $y^2-2y-x-1=0$.

Преобразуем уравнение:

$$(y^2-2y+1)-x-1-1=0;\ (y-1)^2=x+2.$$

Переходя к новым координатам по формулам

$$X=x+2;\ Y=y-1,$$

получаем уравнение

$$Y^2=X,$$

определяющее параболу (рис. 20) с осью O_1X. Вершина параболы находится в точке $O_1(-2; 1)$, параметр $p=0{,}5$.

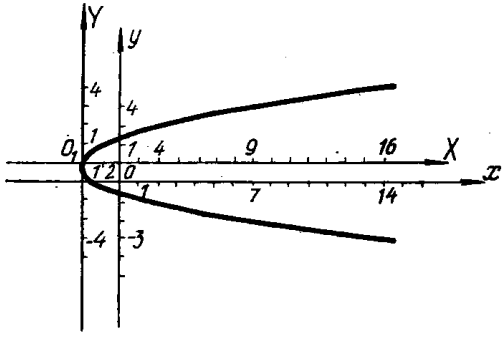


Рис. 20

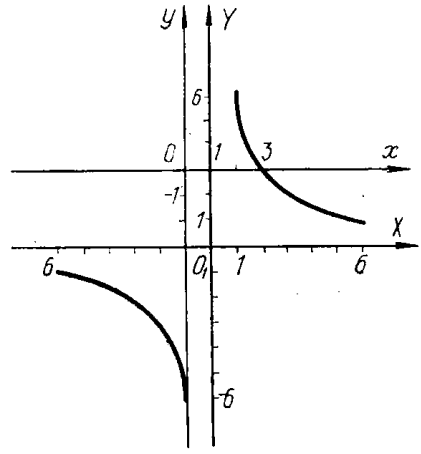


Рис. 21

Пример 6. Определить вид и расположение линии, заданной уравнением $xy+3x-y-9=0$.

Преобразуем данное уравнение:

$$x(y+3)-y-3-6=0;\ x(y+3)-(y+3)-6=0;$$

$$(x-1)(y+3)=6.$$

В новой системе координат

$$X=x-1;\ Y=y+3$$

это уравнение принимает вид

$$XY=6$$

и определяет равностороннюю гиперболу (рис. 21), асимптоты которой совпадают с новыми координатными осями O_1X и O_1Y, центр гиперболы находится в точке $O_1(1; -3)$ — начале новой системы координат.

Построить линии, определяемые уравнениями:

259. $4x^2+9y^2-8x-18y-25=0$. **260.** $4x^2+y^2+16x-6y+9=0$.
261. $4x^2-9y^2-16x-54y-101=0$. **262.** $y^2-2x^2-20x+2y-53=0$.
263. $xy+5x-2y-18=0$. **264.** $xy-4x+3y-6=0$.
265. $y=\dfrac{x-3}{x+2}$. **266.** $x=\dfrac{y+2}{y-4}$.
267. $y^2-2y-4x+13=0$. **268.** $y^2+4y+6x+10=0$.
269. $x^2+2x-8y+17=0$. **270.** $x^2-6x+10y+29=0$.
271. $x^2-y^2+2x+1=0$. **272.** $x^2-2xy+y^2-1=0$.
273. $x^2+y^2+2xy+2x+2y+1=0$. **274.** $xy+3x-2y-6=0$.
275. $x^2-x-6=0$. **276.** $y^2+5y+4=0$.

Какое множество точек определяется каждым из следующих уравнений:

277. $x^2+y^2+8x-12y+27=0$. **278.** $2x^2+2y^2-10x+6y-1=0$.
279. $5x^2+5y^2-10x+20y+31=0$. **280.** $x^2+2y^2+4x-4y+6=0$.
281. $4x^2+9y^2-8x+18y-23=0$.
282. $9x^2-4y^2+18x-16y+29=0$.
283. $y^2+6y-4x+17=0$. **284.** $x^2+2xy+y^2-1=0$.

§ 14. Упрощение общего уравнения второй степени при повороте осей и параллельном переносе

Общее уравнение второй степени относительно прямоугольных декартовых координат x и y

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+by+F=0$$

при повороте координатных осей на угол α, определяемый равенством

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{A-C}{2B}, \tag{29}$$

преобразуется в уравнение

$$A_1x'^2+C_1y'^2+D_1x'+E_1y'+F=0. \tag{30}$$

Формулы преобразования при повороте осей на угол α имеют вид

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha;\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,\end{aligned}\right\}$$

причем

$$\sin\alpha=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}};$$

$$\cos 2\alpha=\frac{\operatorname{ctg} 2\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 2\alpha}},$$

где $\operatorname{ctg} 2\alpha$ определяется формулой (29).

Уравнение (30) не содержит члена с произведением координат, оно является уравнением вида (19). При переходе к новой системе координат O_1XY, полученной из системы $Ox'y'$ путем параллельного переноса, уравнение (30) преобразуется к одному из канонических уравнений (20)—(28).

Пример 1. Определить вид, параметры и расположение относительно системы координат линии, заданной уравнением $3x^2-10xy+3y^2-16x+24=0$.

В данном случае $A=3$, $2B=-10$, $C=3$. По формуле (29) находим

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{3-3}{-10} = 0.$$

Взяв $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{4}$, найдем формулы преобразования:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'); \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'). \tag{I}$$

Подставляя эти формулы в исходное уравнение, получаем

$$3\cdot\frac{1}{2}(x'-y')^2 - 10\cdot\frac{1}{2}(x'-y')(x'+y') +$$

$$+3\cdot\frac{1}{2}(x'+y')^2 - 16\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') + 16\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') + 24 = 0;$$

$$-2x'^2 + 8y'^2 + 16\sqrt{2}\,y' + 24 = 0. \tag{II}$$

Уравнение (II) является уравнением вида (19); оно не содержит члена с произведением координат. Предварительно разделив это уравнение почленно на (—2), преобразуем его к виду

$$x'^2 - 4(y'+\sqrt{2})^2 = 4.$$

Вводя новые координаты по формулам

$$X = x'; \quad Y = y' + \sqrt{2}, \tag{III}$$

получаем

$$X^2 - 4Y^2 = 4 \text{ или } \frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{1} = 1. \tag{IV}$$

Уравнение (IV) определяет гиперболу с полуосями $a=2$, $b=1$ и действительной осью O_1X. Центр этой гиперболы находится в точке, новые координаты которой $X=0$, $Y=0$. С помощью формул (III) и (I) находим промежуточные координаты x', y' и старые координаты x, y: $x'=0$, $y'=-\sqrt{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(0+\sqrt{2}) = 1$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(0-\sqrt{2}) = -1$, т. е. $O_1(1;\ -1)$.

Строим новую систему координат O_1XY с началом в точке O_1 (1; —1), ось O_1X образует с осью OX угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$, и саму гиперболу.

Замечания: 1. Задачу можно решать и в другой последовательности. С помощью формул преобразования при параллельном переносе $x = x' + x_0$; $y = y' + y_0$ преобразуем уравнение так, чтобы коэффициенты при первых степенях x' и y' обратились в нули. Подставляя эти формулы в исходное уравнение, найдем выражения для коэффициентов при x' и y', приравняем их нулю:

$$3x_0 - 5y_0 - 8 = 0; \quad 5x_0 - 3y_0 - 8 = 0.$$

Решив эту систему уравнений, получим $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ — старые координаты нового начала промежуточной координатной системы $O_1x'y'$ (см. рис. 22). Преобразованное уравнение примет вид

$$3x'^2 - 10x'y' + 3y'^2 + 8 = 0.$$

Введем новую систему координат с началом в точке $O_1(1; -1)$, получающуюся из системы $O_1x'y'$ путем поворота на угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$. С помощью формул

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y);\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y)$$

преобразуем уравнение к виду (IV).

2. В качестве угла поворота координатных осей можно взять $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. Исходное уравнение приводится к виду

$$-\frac{X'^2}{1} + \frac{Y'^2}{4} = 1,$$

оно определяет ту же гиперболу в системе координат $O_1X'Y'$ (положительная ось O_1X' совпадает с отрицательной осью O_1Y системы, изображенной на рис. 22; сделайте чертеж для этого случая).

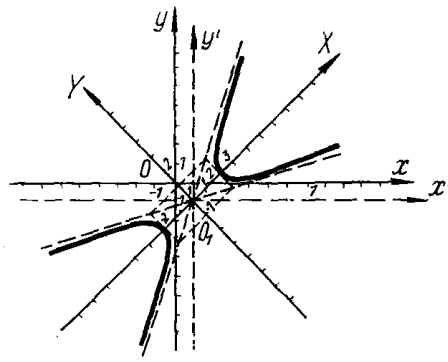


Рис. 22

Пример 2. Построить линию, определяемую уравнением $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 16x - 16y = 0$.

Поскольку

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B} = \frac{5 - 5}{-6} = 0,$$

то можно взять $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и воспользоваться формулами (I) примера 1.

Подставляя эти формулы в данное уравнение, получаем

$$\frac{5}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) - 3(x'^2 - y'^2) + \frac{5}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) +$$

$$+ 8\sqrt{2}(x' - y') - 8\sqrt{2}(x' + y') = 0;$$

$$2x'^2 + 8y'^2 - 16\sqrt{2}y' = 0;\ x'^2 + 4y'^2 - 8\sqrt{2}y' = 0;$$

$$x'^2 + 4(y'^2 - 2\sqrt{2}y' + 2) - 8 = 0;\ x'^2 + 4(y' - \sqrt{2})^2 = 8.$$

Переходя к новым координатам по формулам

$$X = x';\ Y = y' - \sqrt{2}, \qquad (I)$$

преобразуем последнее уравнение к виду

$$X^2 + 4Y^2 = 8 \text{ или } \frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{2} = 1. \qquad (II)$$

Уравнение (I) определяет эллипс с полуосями $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ (эти отрезки легко построить, $\sqrt{2}$ выражает длину диагонали квадрата, сторона которого равна единице). Центр эллипса находится в точке, для которой $X = 0$, $Y = 0$. С помощью формул (I) примера 1 и (I) находим: $x' = 0$, $y' = \sqrt{2}$, $x = -1$, $y = 1$, $O_1(-1; 1)$.

Строим эллипс, определяемый уравнением (II), относительно системы координат O_1XY (рис. 23); тем самым линия построена относительно старой системы координат Oxy. Отметим, что эллипс проходит через начало старой системы координат (исходное уравнение не содержит свободного члена, ему удовлетворяют координаты $x=0$, $y=0$).

Пример 3. Построить линию, определяемую уравнением $x^2+2xy+y^2-10x+6y+25=0$.

Так как

$$\operatorname{ctg} 2\alpha=\frac{1-1}{2}=0,$$

то можно снова взять $2\alpha=\frac{\pi}{2}$ и воспользоваться формулами (I) примера 1. Подставляя эти формулы в данное уравнение, получаем:

$$\frac{1}{2}(x'-y')^2+(x'^2-y'^2)+\frac{1}{2}(x'+y')^2-5\sqrt{2}(x'-y')+$$

$$+3\sqrt{2}(x'+y')+25=0;$$

$$2x'^2-2\sqrt{2}x'+8\sqrt{2}y'+25=0;$$

$$2\left(x'^2-2\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{1}{2}\right)-1+8\sqrt{2}y'+25=0;$$

$$\left(x'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+4\sqrt{2}y'+12=0;\quad \left(x'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=-4\sqrt{2}\left(y'+\frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Переходя к новым координатам по формулам

$$X=x'-\frac{\sqrt{2}}{2};\quad Y=y'+\frac{3}{\sqrt{2}}, \tag{I}$$

находим каноническое уравнение

$$X^2=-4\sqrt{2}Y, \tag{II}$$

определяющее параболу с осью O_1Y. Вершина параболы находится в точке, для которой $X=0$, $Y=0$. С помощью формул (I) примера 1 и (I) вычисляем: $x'=$

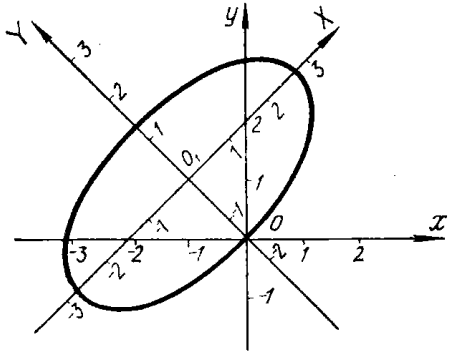


Рис. 23

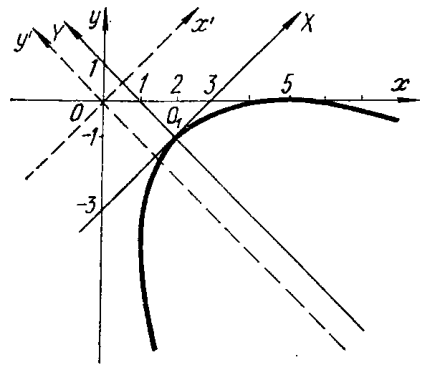


Рис. 24

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$; $y' = -\frac{3}{\sqrt{2}}$; $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = 2$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \right.$

$\left. - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -1$. Начало новой системы координат O_1XY находится в точке O_1 (2; —1).

Строим параболу относительно координатной системы O_1XY (рис. 24) по ее каноническому уравнению (II).

Построить линии, определяемые уравнениями:

285. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16x + 16y = 0$.

286. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 24x + 8y + 24 = 0$.

287. $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8x + 8y + 4 = 0$.

288. $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 4x + 4y + 12 = 0$.

289. $x^2 - 6xy + y^2 + 4x + 8y - 8 = 0$.

290. $x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 12y + 27 = 0$.

291. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 4x - 3y = 0$.

292. $16x^2 + 24xy + 9y^2 - 15x + 20y = 0$.

293. $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 22x + 16y + 9 = 0$.

294. $2x^2 - 12xy - 7y^2 + 12x + 14y + 3 = 0$.

295. $2x^2 + 2xy + 2y^2 + 2x - 8y + 11 = 0$.

296. $3x^2 + 4xy + 3y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$.

297. $2x^2 + 6xy + 2y^2 + 16x + 14y + 27 = 0$.

298. $x^2 - 2xy + y^2 - 6x + 2y + 4 = 0$.

299. $7x^2 - 10xy + 7y^2 - 18x + 6y + 3 = 0$.

300. $5x^2 - 14xy + 5y^2 - 24x + 24y + 36 = 0$.

301. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y - 16 = 0$.

302. $x^2 + 8xy + 3y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$.

303. $4x^2 - 4xy + y^2 - 10y - 11 = 0$.

304. $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$.

305. $4x^2 + 10xy + 4y^2 + 2x - 2y + 7 = 0$.

306. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 10x + 15y + 19 = 0$.

307. $7x^2 - 18xy + 7y^2 + 10x - 22y + 15 = 0$.

308. $x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x - 7y - 20 = 0$.

309. $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 6x + 3 = 0$.

310. $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 22x - 16y + 9 = 0$.

311. $4x^2 + 4xy + y^2 + 6x - 6y - 5 = 0$.

312. $3x^2 - 10xy + 3y^2 + 6x - 10y + 19 = 0$.

313. $x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$.

314. $x^2 - y^2 - 4x + 4 = 0$.

315. $x^2 - 2xy + y^2 - 9 = 0$.

Глава IV. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

В этой главе вводятся понятия функции, ее предела и непрерывности функции. Рассматриваются числовые последовательности и их пределы, два замечательных предела. Приводятся примеры и задачи, связанные с указанными понятиями.

§ 15. Функция. График функции

Рассмотрим множество X элементов x и множество Y элементов y. Если каждому элементу $x \in X$ по определенному закону поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана *функция* $y=f(x)$ со значениями в множестве Y. Элементы $x \in X$ называются *значениями аргумента*, а элементы $y \in Y$ — *значениями функции*. Множество X называется *областью определения функции*, множество всех значений функции — *областью значений* этой функции.

Если X и Y являются числовыми множествами, то числовая функция $y=f(x)$ называется *действительной функцией* одного действительного аргумента.

Употребляются различные обозначения функции: $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, $y=F(x)$, $y=\Phi(x)$, $y=y(x)$ и т. п. Значение, которое принимает функция $y=f(x)$ при $x=a$, обозначается $f(a)$. Функция и аргумент могут обозначаться и другими буквами; например, $s=f(t)$, $u=f(v)$, $r=r(t)$, $x=x(t)$ и т. д. Область определения функции f обозначается $D(f)$, а множество значений функции f — через $E(f)$.

Областью определения действительной функции одного действительного аргумента может быть один или несколько промежутков или множество отдельных точек. *Промежутком* от a до b называется множество действительных чисел, удовлетворяющих одному из неравенств: $a \leqslant x \leqslant b$ (оба конца включены); $a<x<b$ (оба конца исключены); $a \leqslant x<b$ или $a<x \leqslant b$ (включен только один конец). Первый промежуток называется *замкнутым (отрезком)* и обозначается $[a; b]$, второй — *открытым (интервалом)* $]a; b[$, третий — *полуоткрытым* $[a; b[$ или $]a; b]$. На рис. 25, *а* изображен отрезок $[-4; 2]$, на рис. 25, *б* — интервал $]-3;3[$, на рис. 25, *в* — полуоткрытые промежутки: $[-2; 1[$, $]3; 6]$ (стрелка означает, что соответствующую точку нужно исключить из рассмотрения). Рассматриваются также бесконечные промежутки: $[a; +\infty[$, $]a; +\infty[$, $]-\infty; b]$, $]-\infty; b[$, $]-\infty; +\infty[$ (вся числовая прямая).

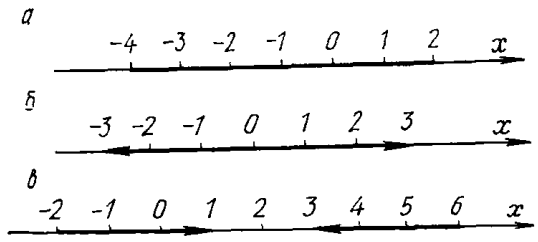


Рис. 25

Если $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ — функции своих аргументов, причем $E(\varphi) \subset D(f)$, то каждому x из области определения функции φ соответствует y такое, что $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$. Эта функция, определяемая соответствием

$$y=f[\varphi(x)],$$

называется *сложной функцией* или *композицией функций*.

Графиком функции $y=f(x)$ называется множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данной функциональной зависимости, т. е. множество точек $M(x; f(x))$.

Рассмотрим простейшие преобразования графика. Пусть дан график функции $y=f(x)$.

График функции

$$y = f(x - a)$$

получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом вдоль оси Ox на $|a|$ единиц вправо (если $a>0$) или влево (если $a<0$).

График функции

$$y = f(x) + b$$

получается из графика функции $y=f(x)$ сдвигом вдоль оси Oy на $|b|$ единиц вверх ($b>0$) или вниз ($b<0$).

График функции

$$y = cf(x) \tag{1}$$

получается из графика $y=f(x)$ в результате сжатия в $\frac{1}{c}$ раз его ординат (при $0<c<1$) или их растяжения в c раз (при $1<c<\infty$) с сохранением соответствующих абсцисс. Если $c\neq 0$, то график функции $y=cf(x)$ является отражением графика $y=-cf(x)$ относительно оси Ox.

График функции

$$y = f(kx) \tag{2}$$

получается из графика функции $y=f(x)$ путем увеличения в $\frac{1}{k}$ раз абсцисс его точек ($0<k<1$) или их уменьшения в k раз ($1<k<\infty$) с сохранением ординат. Если $k\neq 0$, то график $y=f(kx)$ представляет собой отражение графика $y=f(-kx)$ относительно оси Oy.

Указанные преобразования используются при построении графиков функций.

Пример 1. Найти область определения функции $y=2\sqrt{x}$ и построить ее график.

Функция $y=2\sqrt{x}$ принимает действительные значения, когда подкоренное выражение неотрицательно, т. е. $x\geqslant 0$. Следовательно, областью определения функции будет бесконечный промежуток $[0; +\infty[$.

Возводя в квадрат обе части данного уравнения, получаем $y^2=4x$. Это уравнение определяет параболу, для которой ось Ox является осью симметрии, а параметр $p=2$. Извлекая квадратный корень, находим $y=\pm 2\sqrt{x}$. По условию нужно взять только знак плюс. Следовательно, искомым графиком будет часть параболы, для которой $y\geqslant 0$ (рис. 26).

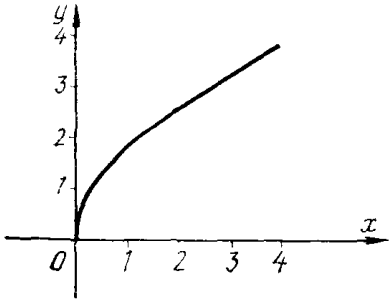


Рис. 26

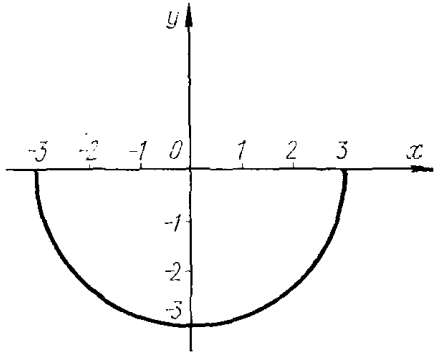


Рис. 27

Пример 2. Найти область определения функции $y=-\sqrt{9-x^2}$ и построить ее график.

Функция определена, когда $9-x^2\geqslant 0$ или $x^2\leqslant 9$. Это неравенство равносильно следующим: $-3\leqslant x\leqslant 3$. Таким образом, функция определена на отрезке $[-3; 3]$. Возводя в квадрат обе части уравнения $y=-\sqrt{9-x^2}$, получаем $x^2+y^2=9$. Это уравнение окружности с центром в начале координат.

Поскольку данная функция принимает только отрицательные значения, ее

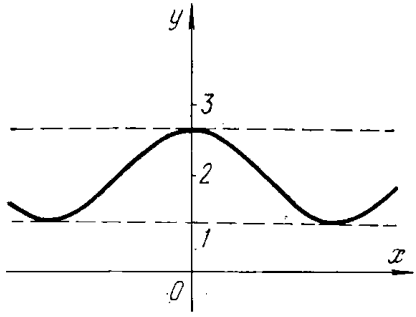


Рис. 28

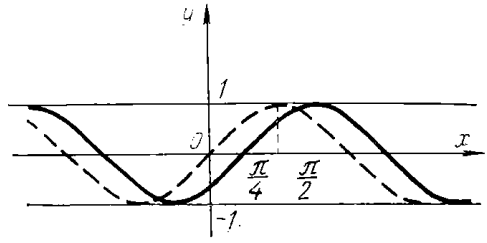


Рис. 29

графиком будет полуокружность, расположенная ниже оси Ox (рис. 27).

Пример 3. Найти область определения функции $y=\arcsin x$.

Так как $\sin y$ не может быть больше 1 и меньше -1, то функция $y=\arcsin x$ не имеет смысла для $x>1$ и $x<-1$, следовательно, областью ее определения является отрезок $[-1; 1]$. График функции дан в приложении 4.

Пример 4. Построить график функции $y=\cos x+2$.

Функция $y=\cos x+2$ определена при всех x, т. е. областью ее определения является бесконечный интервал $]-\infty; \infty[$. Графиком данной функции будет косинусоида, сдвинутая в направлении оси Oy вверх на две единицы (рис. 28).

Пример 5. Построить график функции $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

График этой функции представляет собой синусоиду, сдвинутую вдоль оси Ox вправо на величину, равную $\frac{\pi}{4}$ (рис. 29).

Пример 6. Построить график функции $y=3\sin 2x$.

На основании преобразований графика (1) и (2) заключаем, что график является синусоидой, абсциссы точек которой уменьшены в два раза, а ординаты увеличены в три раза (рис. 30).

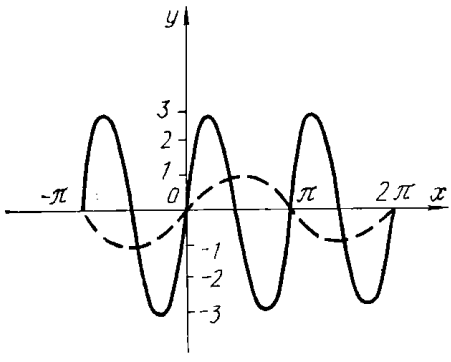


Рис. 30

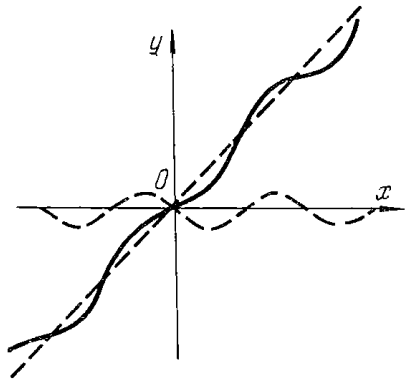


Рис. 31

Пример 7. Построить график функции $y=x-\sin x$.

График представляет собой сумму графиков двух функций: $y=x$, $y=-\sin x$, изображенных на рис. 31 пунктирными линиями.

Найти области определения функций:

316. 1) $y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}$; 2) $y=\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}$; 3) $y=\frac{4}{5}\times$ $\times\sqrt{x^2-25}$; 4) $y=\sqrt{4+x}+\sqrt{3-x}$.

317. 1) $y=\lg(x+3)$; 2) $y=\arccos x$; 3) $y=\lg|x-2|$; 4) $y=$ $=\sqrt{x^2-9}+\sqrt{36-x^2}$.

318. 1) $y=\operatorname{arctg} x$; 2) $y=x^2-3x+5$; 3) $y=\frac{x+2}{x-3}$; 4) $y=$ $=\lg\left|\frac{x-5}{x+5}\right|$.

319. Найти $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $f(x+h)$ если: 1) $f(x)=x^2-x+2$; 2) $f(x)=x^2-3x+5$; 3) $f(x)=x^4-3x^3+$ $+3x^2-4x+5$; 4) $f(x)=x^2+6x+7$.

320. Найти многочлен второй степени $f(x)=ax^2+bx+c$ такой, что: 1) $f(0)=3$, $f(1)=-1$, $f(-2)=19$; 2) $f(0)=6$, $f(1)=5$, $f(2)=10$; 3) $f(-1)=6$, $f(0)=-1$, $f(2)=3$; 4) $f(-1)=7$, $f(0)=5$, $f(1)=11$.

Построить графики элементарных функций:

321. 1) $y=x^2$; 2) $y=x^2+2$; 3) $y=x^2-2$.

322. 1) $x=-y^2$; 2) $x=3-y^2$; 3) $x=-3-y^2$.

323. 1) $xy=6$; 2) $xy=-6$; 3) $y=\frac{1}{x-3}$.

324. 1) $y=2^x$; 2) $y=2^x+4$; 3) $y=2^x-4$.

325. 1) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; 2) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x+5$; 3) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-5$.

326. 1) $y=\lg x$; 2) $y=\lg(x+3)$; 3) $y=\lg(x-3)$.

327. 1) $y=-\cos x$; 2) $y=3\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $y=\cos^2 x$.

Найти области определения функций и по точкам в промежутке $[-2; 2]$ построить их графики:

328. 1) $y=x^3$; 2) $y=x^3+1$; 3) $y=x^3-1$.

329. 1) $y=x^4$; 2) $y=x^4+2$; 3) $y=x^4-2$.

Найти области определения функций и построить их графики:

330. 1) $y=|x|$; 2) $y=|x-1|$; 3) $y=|x|-1$.

331. 1) $y=|\sin x|$; 2) $y=\lg\sin x$; 3) $y=\lg|\sin x|$.

332. 1) $y=|\cos x|$; 2) $y=\lg\cos x$; 3) $y=\lg|\cos x|$.

333. 1) $y=\lg|x|$; 2) $y=|\lg x|$; 3) $y=|\lg|x||$.

334. 1) $y=\sec x$; 2) $y=|\sec x|$; 3) $y=\lg\sec x$.

335. 1) $y=\operatorname{cosec} x$; 2) $y=|\operatorname{cosec} x|$; 3) $y=\lg\operatorname{cosec} x$.

336. В треугольник ABC, основание которого $AC = b$ и высота $BD = h$, вписан прямоугольник высоты x. Выразить основание прямоугольника y как функцию x, найти ее область определения.

337. Даны две функции $f(x) = x^2$, $\varphi(x) = \sin x$. Найти $f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$.

338. Пусть $f(x) = x^3$, $\varphi(x) = \cos x$. Найти $f[\varphi(x)]$, $\varphi[f(x)]$.

339. Найти явные обратные функции для данных функций: 1) $y = 3x - 4$; 2) $y = \sqrt{1-x^2}$; 3) $y = 2^x$; 4) $y = \cos \dfrac{x}{3}$.

§ 16. Предел последовательности. Предел функции

Числовой последовательностью (или *последовательностью*) называется функция

$$x_n = \varphi(n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

определенная на множестве натуральных чисел. Каждое значение x_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) называется *элементом* последовательности, а число n—его *номером*.

Числовую последовательность с элементом x_n обозначают либо x_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), либо $\{x_n\}$, либо (x_n).

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{3}$$

Обозначения предела последовательности:

$$\lim x_n = a; \quad x_n \to a \text{ при } n \to \infty$$

(читается: x_n стремится к a при n, стремящемся к бесконечности).

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся;* последовательность, у которой нет предела,— *расходящейся.*

Отметим, что неравенство (3) равносильно неравенствам $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$ или $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$.

Всякий интервал вида $]x-\varepsilon;\ x+\varepsilon[$, где $\varepsilon > 0$, называется *ε-окрестностью* точки x на числовой прямой; обозначают его $O(x;\ \varepsilon)$.

Определение предела имеет следующий геометрический смысл: число a является пределом последовательности $\{x_n\}$, если в любой его ε-окрестности содержатся почти все элементы x_n, т. е. вне этой окрестности находится лишь конечное число элементов данной последовательности.

Из определения предела последовательности следует, что предел постоянной равен этой постоянной, т. е. $\lim c = c$ ($c = \text{const}$).

Из определения предела и его геометрического смысла следует, что последовательность может иметь только один предел.

Суммой, *разностью* и *произведением* двух последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ называются соответственно последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$.

Если $y_n \neq 0$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), то *частным* от деления последовательности $\{x_n\}$ на $\{y_n\}$ называется последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$.

Произведением последовательности $\{x_n\}$ *на число* c называется последовательность $\{cx_n\}$.

Бесконечно малой последовательностью называется последовательность $\{\alpha_n\}$, предел которой равен нулю, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0.$$

Более подробно: последовательность $\{\alpha_n\}$ называется бесконечно малой, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое натуральное число N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $|\alpha_n-0|<\varepsilon$, или $|\alpha_n|<\varepsilon$.

Если $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности, то их сумма, разность и произведение также являются бесконечно малыми последовательностями.

Для того, чтобы число a являлось пределом последовательности $\{x_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$x_n = a + \alpha_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где $\{\alpha_n\}$—бесконечно малая последовательность.

Если $\{x_n\}$, $\{y_n\}$—сходящиеся последовательности, то их сумма, разность и произведение также сходятся, причем

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Если, кроме того, $y_n \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то сходится также и частное $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$, причем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *бесконечно большой*, если для любого сколь угодно большого числа $E>0$ существует такой номер N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство

$$|x_n| > E;$$

в этом случае пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Если, начиная с некоторого номера, x_n принимает только положительные или только отрицательные значения, то пишут соответственно

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty; \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Если $\{\alpha_n\}$—бесконечно малая последовательность и $\alpha_n \neq 0$ ни при каком n, то последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = 1:\alpha_n$, является бесконечно большой.

Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x, стремящемся к a (или в точке a), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \delta, \tag{4}$$

выполняется неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Обозначения предела функции $f(x)$ в точке a:

$$\lim_{x\to a} f(x) = b; \quad f(x) \to b \text{ при } x \to a.$$

Если функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ имеют конечные пределы при $x \to a$, то

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) - \lim_{x\to a} f_2(x) + \lim_{x\to a} f_3(x); \tag{5}$$

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot f_3(x)]=\lim_{x\to a}f_1(x)\cdot\lim_{x\to a}f_2(x)\cdot\lim_{x\to a}f_3(x);$$

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)]^n=[\lim_{x\to a}f_1(x)]^n; \tag{6}$$

$$\lim_{x\to a}[cf_1(x)]=c\lim_{x\to a}f_1(x); \tag{7}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a}f_2(x)}\quad(\lim f_2(x)\neq 0); \tag{8}$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f_1(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f_1(x)}\,.$$

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — две функции, одновременно обращающиеся в нуль при $x=a$:

$$f(a)=0,\ \varphi(a)=0.$$

Отношение $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ теряет смысл при $x=a$. Тогда говорят, что функция $F(x)=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ в точке a имеет неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Предел указанного отношения $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x\to a$ может существовать. Задача отыскания предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ в этом случае называется *раскрытием неопределенности вида* $\dfrac{0}{0}$.

Если при $x\to a$ обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ стремятся к ∞, то говорят, что *в точке a функция* $F(x)=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *имеет неопределенность вида* $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Раскрытием неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ называется отыскание предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при условии, что $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$; $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$.

Пример 1. В каких границах меняется x, если $|x-1|<3$?

Неравенство $|x-1|<3$ эквивалентно неравенствам $-3<x-1<3$, откуда $1-3<x<3+1$. Таким образом, $-2<x<4$.

Этот пример можно решить и по-другому. По определению модуля имеем $|x-1|=x-1$, когда $x-1>0$, и $|x-1|=-(x-1)=1-x$, когда $x-1<0$. Следовательно, $x-1<3$, откуда $x<4$ и $1-x<3$, откуда $x>-2$. Итак, $-2<x<4$.

Пример 2. Показать, что последовательность $x_n=\dfrac{1}{n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ имеет пределом нуль. Начиная с какого номера ее значения становятся и остаются меньше 0,001?

Последовательность $x_n=\dfrac{1}{n}$ $(n=1, 2, \ldots)$ принимает значения: $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots$.

Пусть $\varepsilon=0{,}001$. Неравенство $\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{1000}$ будет иметь место, когда $n>1000$. Следовательно, $N=1000$. Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$. Покажем, что, начиная с некоторого значения n, выполняется неравенство (3). В данном случае $x_n=\dfrac{1}{n}$ и $a=0$.

Неравенство $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ или $\frac{1}{n}<\varepsilon$ будет выполняться, когда $n>\frac{1}{\varepsilon}$. В качестве числа N можно взять меньшее из двух целых чисел, между которыми заключено $\frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое N, что для всех $n>N$ выполняется неравенство $\frac{1}{n}<\varepsilon$. Это означает, что x_n имеет пределом нуль, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+4x+5)$.

На основании свойств пределов (5)—(7) получаем

$$\lim_{x\to 2}(3x^2+4x+5)=3\lim_{x\to 2}(x^2)+4\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}5=$$

$$=3(\lim_{x\to 2}x)^2+4\lim_{x\to 2}x+5=3\cdot 2^2+4\cdot 2+5=25.$$

Замечание. Чтобы найти предел многочлена $P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx_{nn}$ при $x\to a$, достаточно вычислить $P_n(a)$, т. е. его значение при $x=a$.

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 4}\frac{5x+6}{3x+1}$.

На основании свойств пределов (8), (5), (7) находим

$$\lim_{x\to 4}\frac{5x+6}{3x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}(5x+6)}{\lim\limits_{x\to 4}(3x+1)}=\frac{5\lim\limits_{x\to 4}x+\lim\limits_{x\to 4}6}{3\lim\limits_{x\to 4}x+\lim\limits_{x\to 4}1}=$$

$$=\frac{5\cdot 4+6}{3\cdot 4+1}=\frac{26}{13}=2.$$

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$.

Числитель и знаменатель данной функции при $x=3$ обращаются в нуль (получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$). Преобразуем данное выражение, разлагая числитель на множители и сокращая на общий множитель $(x-3)\neq 0$. Получаем

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-2)=3-2=1.$$

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^4+x^3+x^2+2x-6}{x^3-1}$.

При $x=1$ числитель и знаменатель обращаются в нуль. Разлагая на множители, находим

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1);$$

$$2x^4+x^3+x^2+2x-6=(x-1)(2x^3+3x^2+4x+6).$$

Второе равенство получено в результате непосредственного деления $(2x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 6)$ на $(x - 1)$. Сокращая числитель и знаменатель на $(x-1) \neq 0$ и переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x^4 + x^3 + x^2 + 2x - 6}{x^3 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{2x^3 + 3x^2 + 4x + 6}{x^2 + x + 1} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 6}{1^2 + 1 + 1} = \frac{15}{3} = 5.$$

Замечание. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, заданную отношением двух многочленов, необходимо предварительно в числителе и знаменателе выделить критический множитель (т. е. множитель, равный нулю при предельном значении x), сократить на него выражение и затем перейти к пределу.

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 7x - 2}$.

При $x \to +\infty$ числитель и знаменатель неограниченно увеличиваются (получаем неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$). Чтобы найти предел, преобразуем данную дробь, разделив ее числитель и знаменатель на x^2, т. е. на старшую степень x. Пользуясь свойствами пределов, получаем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 7x - 2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}{3 + \frac{7}{x} - \frac{2}{x^2}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(6 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3 + \frac{7}{x} - \frac{2}{x^2}\right)} = \frac{6 + 0 + 0}{3 + 0 - 0} = 2.$$

Здесь принято во внимание, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a}{x^2} = 0$, $a = \text{const}$.

Пример 8. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2 + 4x - 5}{2x^3 + 8x^2 - 9}$.

Разделив числитель и знаменатель дроби на x^3, т. е. на старшую степень x, и перейдя к пределу, получим

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2 + 4x - 5}{2x^3 + 8x^2 - 9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^3}}{2 + \frac{8}{x} - \frac{9}{x^3}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 + \frac{8}{x} - \frac{9}{x^3}\right)} = \frac{0 + 0 - 0}{2 + 0 - 0} = 0.$$

Замечание. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, заданную отношением двух многочленов, необходимо предварительно числитель и знаменатель разделить на самую высокую входящую в них степень x.

Пример 9. Найти предел $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}$.

При $x=3$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Знаменатель содержит иррациональное выражение $\sqrt{x+1}$. Избавимся от иррациональности, умножив числитель и знаменатель на $(\sqrt{x+1}+2)$, и перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x-1})^2-2^2}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+1}+2)}{(x+1)-4}=$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)(\sqrt{x+1}+2)=(3+3)(\sqrt{3+1}+2)=24.$$

Замечание. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$, в которой числитель или знаменатель содержат иррациональность, следует предварительно избавиться от иррациональности.

Пример 10. Сравнить бесконечно малые функции при $\alpha\to 0$: α; $\beta=\alpha^3$; $\gamma=3\alpha$.

Рассмотрим отношения

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^3}{\alpha}=\alpha^2;\quad \frac{\gamma}{\alpha}=\frac{3\alpha}{\alpha}=3.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\beta}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\alpha^2=0;\ \lim_{\alpha\to 0}\frac{\gamma}{\alpha}=3.$$

Следовательно, функция β является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с α, бесконечно малые α и γ — бесконечно малыми функциями одного порядка.

340. В каких границах меняется x, если: 1) $|x|<2$; 2) $|x+1|<4$; 3) $|x-2|<5$; 4) $|x+3|<7$?

341. Показать, что последовательности $\alpha_n=-\dfrac{1}{n}$, $\beta=\dfrac{(-1)^n}{n}$ имеют пределами нуль. Изобразить графически их изменение.

342. Начиная с какого номера каждая из последовательностей $\alpha_n=\dfrac{1}{n}$, $\beta_n=\dfrac{1}{n^2}$, $\gamma_n=\dfrac{1}{n^4}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ становится и остается меньше $\varepsilon=0{,}0001$? Начиная с какого номера все указанные величины одновременно меньше $\varepsilon=0{,}0001$?

Найти пределы:

343. $\lim\limits_{x\to 3}(4x^2-6x+5)$. **344.** $\lim\limits_{x\to 1}(2x^3-4x^2+5x-7)$.

345. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-x+7}{3x+1}$.

346. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+2x+5}{x^2+1}$.

347. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-7x+12}{x-4}$.

348. $\lim\limits_{x\to 27}\dfrac{\sqrt[3]{x}-3}{x-27}$.

349. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-6x+8}$.

350. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}$.

351. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sin x}$.

352. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$.

353. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x-7}{5-2x}$.

354. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+4x^2+5x-6}{x^3+2x^2+3x+7}$.

355. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3+4x^2+8}{5x^4+2x^3-9}$.

356. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+5x^2-8}{x^2+4x+10}$.

357. Доказать, что:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}=\dfrac{a_n}{b_m}\quad(n=m)$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}=0\quad(n<m)$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}=\infty\quad(n>m)$.

Найти пределы:

358. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{4n^2-1}}{2n+1}$.

359. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9n+4}{\sqrt[3]{27n^3-5n^2+7}}$.

360. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{1-x^2}+3^{\frac{1}{x}}\right)$.

361. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$.

362. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3}{\sqrt{x+1}-1}$.

363. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{16-x^2}$.

§ 17. Число e; $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$

Числом e называется предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

или

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e. \tag{9}$$

Число e является иррациональным, $e\approx 2{,}71828\ldots$ Логарифмы с основанием e называются *натуральными* и обозначаются $\ln x$. Число e бывает полезным при раскрытии неопределенностей вида 1^∞.

Если угол α выражен в радианах, то

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1. \tag{10}$$

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$.

При $n\to\infty$ $\left(1+\frac{3}{n}\right)\to 1$ получаем неопределенность вида 1^∞. Чтобы раскрыть ее, воспользуемся формулой (9).

Положим $\frac{3}{n}=\alpha$, тогда $n=\frac{3}{\alpha}$. Если $n\to\infty$, то $\alpha\to 0$. На основании свойства пределов (6) и формулы (9) получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{3}{\alpha}}=\lim_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^3=\left[\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^3=e^3.$$

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{x+2}\right)^x$.

Здесь также имеем неопределенность 1^∞. Прибавляя и вычитая 2 в числителе, используя свойства пределов, формулу (9) и полагая $-\frac{2}{x+2}=\alpha$, находим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2-2}{x+2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[1-\frac{2}{x+2}\right]^x=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-2-\frac{2}{\alpha}}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-2}\lim_{\alpha\to 0}[(1+\alpha)^{1/\alpha}]^{-2}=e^{-2}.$$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

При $x=0$ числитель и знаменатель обращаются в нуль. Чтобы раскрыть эту неопределенность, положим $3x=\alpha$, тогда $x=\frac{\alpha}{3}$; если $x\to 0$, то и $\alpha\to 0$. Подставив в условие данные равенства и использовав формулу (10), получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\frac{\alpha}{3}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{3\sin\alpha}{\alpha}=3\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=3\cdot 1=3.$$

Этот пример можно решить, не вводя явно переменную α. Умножая числитель и знаменатель на 3, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}$.

Здесь также имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Чтобы раскрыть ее, применим формулу (10). Не вводя явно переменную α, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}.$$

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+4}-2}$.

При $x=0$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль. Знаменатель содержит иррациональность. Освободимся от иррациональности и воспользуемся формулой (10). Умножая числитель и знаменатель на $(\sqrt{x+4}+2)$ и переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}+2)\sin x}{(x+4)-4}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{x}(\sqrt{x+4}+2)\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+4}+2)=1\cdot(2+2)=4.$$

Найти пределы:

364. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x}$.

365. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{5}}{x}$.

366. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}$.

367. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{x}$.

368. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$.

369. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 2x}{x^3}$.

370. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x\sin x}{1-\cos 2x}$.

371. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+9}-3}$.

372. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-9}$.

373. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin^2(x-2)}{2x^2-8x+8}$.

374. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\sec x-1}$.

375. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x-\operatorname{tg}^2 x}{x\sin x}$.

376. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin(x-h)}{h}$.

377. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos(x+h)-\cos(x-h)}{h}$.

378. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}$.

379. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{x}$.

380. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n-3}\right)^{n}$.

381. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{x}}$.

382. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^{3x}$.

383. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x)^{2\operatorname{ctg}^2 x}$

384. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+\alpha)}{2\alpha}$.

385. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}-1}{3x}$.

386. $\lim\limits_{m\to\infty} m\,[\ln(m+4)-\ln m]$.

387. $\lim\limits_{m\to\infty} m\,[\ln m-\ln(m+1)]$.

§ 18. Разные примеры на нахождение пределов

При нахождении пределов могут встретиться неопределенности вида $(\infty-\infty)$ и $0\cdot\infty$. Покажем на примерах, как находятся такие пределы.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x}-x)$.

Здесь мы имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Умножив и разделив данное выражение на $(\sqrt{x^2+4x}+x)$, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+4x)-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}=\frac{4}{1+1}=2.$$

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$.

Как и в предыдущем примере, имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Приводя данные дроби к общему знаменателю и переходя к пределу, находим

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x+2-4}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}.$$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$.

В данном примере имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Введем новую переменную α по формуле $\alpha=1-x$, откуда $x=1-\alpha$; если $x\to 1$, то $\alpha\to 0$. Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x=\lim_{\alpha\to 0}\left[\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right]=\lim_{\alpha\to 0}\left[\alpha\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\alpha\right)\right]=$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\left(\alpha \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\alpha\right) = \lim_{\alpha\to 0}\left(\alpha\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2}\alpha}{\sin\frac{\pi}{2}\alpha}\right) = \lim_{\alpha\to 0}\cos\frac{\pi}{2}\alpha \times$$

$$\times \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sin\frac{\pi}{2}\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\frac{\pi}{2}\alpha}{\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\alpha}\lim_{\alpha\to 0}\cos\frac{\pi}{2}\alpha = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\cdot 1 = \frac{2}{\pi}.$$

Найти пределы:

388. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+3x+2})$.

389. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+a^2}-x)$.

390. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)$.

391. $\lim\limits_{x\to-4}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{8}{16-x^2}\right)$.

392. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x$.

393. $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}x$.

394. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+x})$.

395. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-8x})$.

396. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{4\sin^2 x}-\frac{1}{\sin^2 2x}\right)$.

397. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.

398. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\sin 6x}$.

399. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x^2-\cos x}{\sin^2 x}$.

400. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^3-1}$.

401. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+2x-3}{x^2+3x}$.

402. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3-2^n}{3+2^{n+1}}$.

403. $\lim\limits_{n\to-\infty}\frac{6-3^n}{2+3^{n+1}}$.

404. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+2}{4x-1}\right)^{4x}$.

405. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n-1)^{2n}}{(n-2)^{2n}}$.

406. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

407. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\operatorname{ctg}^2 2x}$.

§ 19. Непрерывность функции

Приращением некоторой переменной величины x называется разность между новым значением этой величины x_1 и ее прежним значением x:

$$\Delta x = x_1 - x.$$

Прибавляя к значению переменной величины ее приращение, получаем *приращенное значение* этой величины

$$x + \Delta x = x_1.$$

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в данной точке* $x = x_0$, если в

этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции (рис. 32):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0.$$

Этому определению равносильно другое определение непрерывности функции в точке x_0: функция называется непрерывной в данной точке, если предел функции при переменной, стремящейся к этой точке, равен значению функции в предельной точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (11)$$

Функция называется *непрерывной в данном промежутке,* если она непрерывна в каждой точке данного промежутка.

Сумма конечного числа функций, непрерывных в некотором промежутке, и их произведение есть функция непрерывная (в том же промежутке).

Частное от деления двух непрерывных функций есть функция, непрерывная во всех точках, в которых делитель отличен от нуля.

Если $y=f(z)$, $z=\varphi(x)$ — непрерывные функции своих аргументов, то сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ является непрерывной функцией независимой переменной x.

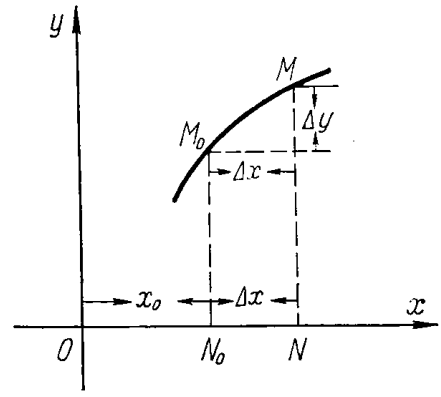


Рис. 32

Пример 1. Доказать, что функция $y=x^3$ является непрерывной в промежутке $]-\infty; +\infty[$.

Функция $y=x^3$ определена при всех x, т. е. в бесконечном интервале $]-\infty; +\infty[$.

Покажем, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции. Зафиксируем произвольную точку x, аргументу x дадим приращение Δx, тогда приращенное значение функции определится формулой

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Приращение функции

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3.$$

Итак,

$$\Delta y = \Delta x\,(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2).$$

Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \lim_{\Delta x \to 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 0 \cdot 3x^2 = 0.$$

Таким образом, бесконечно малому приращению аргумента в любой точке соответствует бесконечно малое приращение функции. Это означает, что функция непрерывна при всех x.

Пример 2. Доказать, что функция $y=x^n$ (n — целое положительное число) непрерывна в промежутке $]-\infty; +\infty[$.

Функция определена при всех x, т. е. в интервале $]-\infty; +\infty[$. Приращенное значение функции при фиксированном x $y+\Delta y=(x+\Delta x)^n=x^n+nx^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x^2+\ldots+\Delta x^n$, откуда

$$\Delta y = (x+\Delta x)^n - y = nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n =$$

$$= \Delta x\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}\right);$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta x \lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}\right) = 0.$$

Замечание. Формула (11) для $f(x)=x^n$ и $x_0=a$ принимает вид $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$.

Пример 3. Доказать, что функция $y=\cos x$ непрерывна при всех x.

Эта функция также определена при любом x из промежутка $]-\infty; +\infty[$. Фиксируя x и давая ему приращение Δx, получаем приращение функции

$$\Delta y = \cos(x+\Delta x) - \cos x = -2\sin\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Так как $|\sin\alpha| \leqslant \alpha$ и $|\sin\alpha| \leqslant 1$, то $|\Delta y| = 2\left|\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leqslant$ $\leqslant 2\cdot 1\cdot\frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|$. Итак, $|\Delta y| \leqslant \Delta x$, поэтому

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0.$$

Замечание. Формула (11) для $f(x)=\cos x$ и $x_0 = a$ принимает вид $\lim\limits_{x\to a}\cos x = \cos a$.

Пример 4. Доказать, что функция $y = \cos x^2$ непрерывна при любом x.

Функция $y = \cos x^2$ является сложной, или функцией от функции, а именно: $y=\cos z$, $z=x^2$. Каждая из этих функций непрерывна (см. пример 2 при $n=2$ и пример 3). В силу непрерывности сложной функции функция $y=\cos x^2$ также непрерывна.

408. Вычислить приращения аргумента и функции $y=\sin x$, когда x изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

409. Вычислить приращения аргумента и функции $y=\cos x$, когда x изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

410. Найти приращение функции $y=x^2$, соответствующее приращению Δx, в точке x_0.

411. Найти приращенное значение функции $y=x^2$, если аргумент x получил приращение $\Delta x=0{,}5$ в точке $x=2$.

412. Доказать, что функция $y = 2x$ непрерывна при всех x.

413. Доказать, что функция $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^u$ непрерывна при всех x.

414. Доказать, что функция $y = \sin x$ непрерывна при всех x.

415. Доказать непрерывность функции: 1) $y = 2\cos 3x$; 2) $y = 3\sin 4x$; 3) $y = \sin x^2$; 4) $y = \cos x^3$.

Глава V. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Производной функции $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{1}$$

или

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Если x меняется, то предел (1) будет также меняться (для некоторых x он может и не существовать), следовательно, производная данной функции есть некоторая функция.

Функция, имеющая конечную производную, называется *дифференцируемой*. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Геометрический смысл производной. Производная функции $y=f(x)$ при $x=x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику данной функции в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$, т. е.

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha,$$

где α — угол между осью Ox прямоугольной декартовой системы координат и касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$.

Механический смысл производной. Для функции $s=f(t)$, меняющейся со временем t, производная $f'(t_0)$ есть скорость изменения функции в момент t_0, т. е.

$$f'(t_0)=v(t_0),$$

где $v(t_0)$ — скорость изменения s в момент $t=t_0$.

Скорость протекания физических, химических, биологических и других процессов выражается с помощью производной.

Если u, v, w — дифференцируемые функции от x, а c — постоянная величина, то имеют место следующие основные правила дифференцирования:

$$c'=0;$$

$$(u-v+w)'=u'-v'+w'; \tag{2}$$

$$(uv)'=u'v+uv'; \tag{3}$$

$$(cv)'=cv'; \tag{4}$$

$$\left(\frac{u}{c}\right)'=\frac{u'}{c};$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad (v\neq 0). \tag{5}$$

§ 20. Производные степенных и тригонометрических функций

Основные формулы:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}; \tag{6}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \tag{7}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}; \tag{8}$$

$$x'_x = 1; \tag{9}$$

$$(\sin x)' = \cos x; \tag{10}$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \tag{11}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Замечание. Формулы (7)—(9) получаются из формулы (6) соответственно при $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = -1$, $\alpha = 1$.

Пример 1. Найти производную функции $y = 2x^4 + 4x^3 + 3x^2 + x$.
На основании формул (2), (4), (6) находим

$$y' = (2x^4)' + (4x^3)' + (3x^2)' + x' = 2(x^4)' + 4(x^3)' + 3(x^2)' + (x)' =$$
$$= 2\cdot 4x^3 + 4\cdot 3x^2 + 3\cdot 2x + 1 = (2x)^3 + 3(2x)^2 + 3(2x) + 1 = (2x+1)^3.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \frac{9}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{3}{x\sqrt[3]{x}}$.

Как и в предыдущем примере, получаем

$$y' = \left(\frac{9}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' - \left(\frac{3}{x\sqrt[3]{x}}\right)' = 9(x^{-2/3})' - 3(x^{-4/3})' =$$
$$= 9\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-5/3} - 3\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-7/3} =$$
$$= -\frac{6}{x^{5/3}} + \frac{4}{x^{7/3}} = \frac{4}{x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{6}{x\sqrt[3]{x^2}}.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = x - \operatorname{tg} x$.
С помощью формул (2), (9) и (11) получаем

$$y' = (x)' - (\operatorname{tg} x)' = 1 - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = -\operatorname{tg}^2 x.$$

Пример 4. Найти производную функции $y = x\sin x$.
Пользуясь формулами (3), (9) и (10), находим

$$y' = x'\sin x + x(\sin x') = 1\cdot\sin x + x\cos x = \sin x + x\cos x.$$

Пример 5. Дана функция $f(x) = x^3 - 4x - 1$. Вычислить $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(3)$.

Находим сначала производную данной функции $f'(x) = 3x^2 - 4$. Подставляя в это выражение указанные значения x, получаем:

$$f'(-2) = 3\cdot(-2)^2 - 4 = 8; \quad f'(-1) = -1; \quad f'(0) = -4;$$

$$f'(1) = -1; \quad f'(3) = 23.$$

Пример 6. Найти производную функции $f(x) = \dfrac{x-4}{x+4}$.

На основании формулы (5) получаем

$$f'(x) = \frac{(x-4)'(x+4) - (x-4)(x+4)'}{(x+4)^2} =$$

$$= \frac{1\cdot(x+4) - (x-4)\cdot 1}{(x+4)^2} = \frac{8}{(x+4)^2}.$$

Пример 7. Найти производную функции $r = a\sin\varphi$.

Здесь функция обозначена буквой r, аргумент—буквой φ, $a = \text{const}$. Дифференцируя, находим

$$r' = (a\sin\varphi)' = a(\sin\varphi)' = a\cos\varphi, \quad r' = a\cos\varphi.$$

Найти производные функций:

416. 1) $y = 5x^2$; 2) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - x$.

417. 1) $y = \dfrac{x^4}{a}$; 2) $y = ax^5 + bx^3 + cx + d$.

418. 1) $y = \dfrac{1}{x^4}$; 2) $y = \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{1}{5x^5}$.

419. 1) $y = \dfrac{a}{x^3}$; 2) $y = \dfrac{a}{x^4} - \dfrac{b}{x^6} + \dfrac{c}{x^2}$.

420. 1) $y = \sqrt[5]{10x^4}$; 2) $y = 4\sqrt[4]{x^3} - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x}$.

421. 1) $y = \dfrac{2}{3\sqrt{5x^3}}$; 2) $y = \dfrac{c}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{d}{x\sqrt[3]{x}}$.

422. 1) $y = \sin x - \cos x$; 2) $y = x + \operatorname{ctg} x$.

423. 1) $y = x\sin x$; 2) $y = \sin x - x\cos x$.

424. 1) $y = x^2\cos x$; 2) $y = 5 + 4x - 4\sin x\cos x$.

425. 1) $y = \dfrac{x}{4} - \dfrac{1}{4}\sin x\cos x$; 2) $y = 2x\cos x + (x^2 - 2)\sin x$.

426. 1) $y = \dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}$; 2) $y = \sec x$; 3) $y = \operatorname{csc} x$.

427. 1) $y = \dfrac{2-x}{2+x}$; 2) $y = \dfrac{ax-b}{ax+b}$.

428. 1) $y=\dfrac{x^2-2}{x^2+1}$; 2) $y=\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$.

429. 1) $y=\dfrac{3x}{1+2x^2}$; 2) $y=\dfrac{4x-5}{x^2-3x+2}$.

430. 1) $y=\dfrac{x\sin x+\cos x}{x}$; 2) $y=\dfrac{x-\cos x}{x+\cos x}$.

431. 1) $s=at^2+bt+c$; 2) $x=a\sin t$.

432. 1) $y=t-\dfrac{1}{t}$; 2) $u=v^2+2v-3$.

433. 1) $x=by+c$; 2) $x=y\sin y+\cos y$; 3) $x=\dfrac{\sin t-t\cos t}{t\sin t+\cos t}$.

434. $f(x)=x^2-5x+6$. Найти $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(4)$, $f'(-2)$.

435. $r(\varphi)=\sin\varphi+\cos\varphi$. Найти $r'(0)$, $r'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, $r'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$, $r'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

436. $s(t)=t^3-t^2+4$. Найти $s'(0)$, $s'(1)$, $s'(2)$, $s'(-2)$.

§ 21. Производная сложной функции

Если $y=f(z)$ и $z=\varphi(x)$ — дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции $y=f[\varphi(x)]$ существует и равна произведению производной данной функции y по промежуточному аргументу z на производную промежуточного аргумента z по независимой переменной x:

$$y'_x=y'_z\cdot z'_x \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}. \tag{12}$$

В частности, формулы § 20 примут вид:

$$(z^\alpha)'=\alpha z^{\alpha-1}\cdot z'; \quad (\sqrt{z})'=\frac{1}{2\sqrt{z}}\cdot z'; \quad (\sin z)'=\cos z\cdot z';$$

$$(\cos z)'=-\sin z\cdot z'; \quad (\operatorname{tg} z)'=\frac{1}{\cos^2 z}\cdot z'; \quad (\operatorname{ctg} z)'=-\frac{1}{\sin^2 z}\cdot z'.$$

Пример 1. Найти производную функции $y=\sin 3x$.

Аргументом синуса здесь является не x, а $3x$. Это сложная тригонометрическая функция, которую можно представить так: $y=\sin z$, $z=3x$.

Дифференцируя функции y и z по своим аргументам, находим

$$y'_z=(\sin z)'_z=\cos z=\cos 3x; \quad z'_x=(3x)'_x=3.$$

Подставляя выражения для y'_z и z'_x в формулу (12), получаем

$$y'_x=\cos 3x\cdot 3, \quad (\sin 3x)'=3\cos 3x.$$

Тот же результат можно получить и непосредственно, не вводя явно промежуточного аргумента:

$$(\sin 3x)'_x=(\sin 3x)'\,(3x)'_x=\cos 3x\cdot 3=3\cos 3x.$$

Замечания: 1. В последних равенствах штрихом обозначено дифференцирование по промежуточному аргументу $z=3x$. Штрих вверху и x внизу означают дифференцирование по x.

2. Здесь принято во внимание, что производная синуса по его аргументу равна косинусу того же аргумента.

Пример 2. Найти производную функции $y=\sin^4 x=(\sin x)^4$.

Это сложная степенная функция с промежуточным аргументом $z=\sin x$. Ее можно представить в виде $y=z^4$, $z=\sin x$. Дифференцируя, получаем

$$y'_z = 4z^3 = 4(\sin x)^3; \quad z'_x = (\sin x)' = \cos x.$$

Подставляя эти выражения в формулу (12), находим

$$y'_x = 4\sin^3 x \cos x = 2\sin 2x \sin^2 x.$$

Тот же результат получается и непосредственно

$$(\sin^4 x)'_x = (\sin^4 x)'(\sin x)'_x = 4\sin^3 x \cos x = 2\sin 2x \sin^2 x.$$

Пример 3. Найти производную функции $y=\cos x^2$.

Это сложная тригонометрическая функция с промежуточным аргументом $z=x^2$. Функция представляется в виде $y=\cos z$, $z=x^2$.

Дифференцируя и подставляя полученные выражения в формулу (12), находим

$$y'_z = (\cos z)'_z = -\sin z = -\sin x^2; \quad z'_x = (x^2)'_x = 2x;$$

$$y'_x = -\sin x^2 \cdot 2x = -2x \sin x^2.$$

Этот результат можно получить и не вводя явно промежуточного аргумента:

$$(\cos x^2)'_x = (\cos x^2)'(x^2)'_x = -\sin x^2 \cdot 2x = -2x \sin x^2.$$

Пример 4. Найти производную функции $y=(ax-b)^5$.

Данная функция является сложной степенной функцией с промежуточным аргументом $z=ax-b$: $y=z^5$.

Дифференцируя, получаем

$$y'_z = (z^5)' = 5z^4 = 5(ax-b)^4; \quad z' = (ax-b)' = a;$$

$$y'_x = 5(ax-b)^4 a = 5a(ax-b)^4.$$

Пример 5. Найти производную функции $y=\sqrt{2x^2-8x+5}$.

Представляя данную функцию в виде $y=\sqrt{z}$, $z=2x^2-8x+5$ и дифференцируя, находим

$$(2x^2-8x+5)' = 4x-8;$$

$$y'_z = (\sqrt{z})'_z = \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2\sqrt{2x^2-8x+5}};$$

$$y'_x = \frac{4x-8}{2\sqrt{2x^2-8x+5}} = \frac{2x-4}{\sqrt{2x^2-8x+5}}.$$

Пример 6. Найти производную функции $y=\cos^2\frac{x}{2}$.

Это сложная степенная функция, аргумент которой является сложной

тригонометрической функцией. Первый промежуточный аргумент есть $\cos\frac{x}{2}$, второй $-\frac{x}{2}$.

Здесь формулу (12) нужно применить дважды:

$$y'_x = \left(\cos^2\frac{x}{2}\right)'\left(\cos\frac{x}{2}\right)'_x = \left(\cos^2\frac{x}{2}\right)'\left(\cos\frac{x}{2}\right)'\left(\frac{x}{2}\right)'_x =$$

$$= 2\cos\frac{x}{2}\left(-\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\sin x;$$

$$y'_x = 2\cos\frac{x}{2}\left(-\sin\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\sin x.$$

Пример 7. Найти производную функции $y = x^2\cos^2 x^2$.

Данная функция представляет собой произведение двух функций, одна из которых является сложной функцией; при дифференцировании последней формулу (12) нужно применить дважды (см. пример 6).

Дифференцируя данную функцию как произведение и функцию от функции, получаем

$$(x^2\cos^2 x^2)' = (x^2)'\cos^2 x^2 + x^2(\cos^2 x^2)' = 2x\cos^2 x^2 +$$

$$+ x^2\,2\cos x^2(-\sin x^2)\,2x = 2x\cos^2 x^2 - 2x^3\sin 2x^2 = 2x(\cos^2 x^2 - x^2\sin 2x^2).$$

Пример 8. Найти производную функции $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$.

Дифференцируя как частное и сложную функцию, находим

$$y' = \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin^2 x)'\cos x - \sin^2 x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{2\sin x\cos x\cos x - \sin^2 x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= 2\sin x + \sin x\,\mathrm{tg}^2 x = \sin x(1 + \sec^2 x).$$

Найти производные функций:

437. $y = \cos 4x$.

438. $y = \sin\frac{x}{4}$.

439. $y = \sin^2 x$.

440. $y = \cos^3 x$.

441. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

442. $y = (3x^2 - 5)^3$.

443. $y = \frac{1}{(ax+b)^2}$.

444. $y = \sqrt{x^4 + 2x + 3}$.

445. $y = \sqrt[3]{(4x-5)^2}$.

446. $y = \sqrt{ax^2 + b^2}$.

447. $y = \sqrt{b^2 - ax}$.

448. $y = (x^2 + a^2)^2$.

449. $y = (a^2 - cx^2)^3$.

450. $y = \sqrt{2x + \sin 4x}$.

451. $y = \sqrt[3]{1 + \cos^2 x}$.

452. $y = \frac{1}{(1+\sin 2x)^3}$.

453. $y = \dfrac{1}{(x+\cos 3x)^2}$.

454. $y = \cos 2\sqrt{x}$.

455. $y = \operatorname{ctg} x + \dfrac{2}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \dfrac{1}{5}\operatorname{ctg}^5 x$.

456. $y = -\operatorname{ctg}^3 x + 3\operatorname{ctg} x + 3x$.

457. $y = \sin^2\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

458. $y = \cos^2 x^2$.

459. $y = x^2\sqrt{2x+4}$.

460. $y = x^3\sqrt{x^2-1}$.

461. $y = \dfrac{2x+4}{\sqrt{2x+5}}$.

462. $y = \dfrac{ax+b}{\sqrt{cx+d}}$.

463. $y = a\left(1 - \cos\dfrac{t}{2}\right)$.

464. $x = a\left(\dfrac{t}{2} - \sin\dfrac{t}{2}\right)$.

465. $r = a\sqrt{\varphi + \sin 2\varphi}$.

466. $s = a \operatorname{tg} 3\varphi$.

§ 22. Производные показательных и логарифмических функций

Основные формулы:

$$(a^x)' = a^x \ln a; \tag{13}$$

$$(e^x)' = e^x;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln a};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Если $z = z(x)$—дифференцируемая функция от x, то формулы примут вид:

$$(a^z)' = a^z \ln a \cdot z'; \tag{14}$$

$$(e^z)' = e^z \cdot z'; \tag{15}$$

$$(\log_a z)' = \frac{z'}{z\ln a};$$

$$(\ln z)' = \frac{z'}{z}. \tag{16}$$

Пример 1. Найти производную функции $y = 3^x$.
Применим формулу (13). В данном случае $a = 3$. Получаем

$$(3^x)' = 3^x \ln 3.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = a^{\cos^2 x}$.
По формуле (14) получаем

$$(a^{\cos^2 x})' = a^{\cos^2 x} \ln a\,(\cos^2 x)' = a^{\cos^2 x} \ln a \cdot 2\cos x\,(-\sin x) =$$

$$= -\sin 2x \cdot a^{\cos^2 x} \ln a.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = e^{x^2+2x+1}$.
По формуле (15) находим

$$(e^{x^2+2x+1})' = e^{x^2+2x+1}\,(x^2+2x+1)' =$$

$$= e^{x^2+2x+1}\,(2x+2) = 2\,(x+1)\,e^{x^2+2x+1}.$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \ln \sqrt{x^2+4x+5}$.
По формуле (16) получаем

$$(\ln \sqrt{x^2+4x+5})' = \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\,(\sqrt{x^2+4x+5})' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+4x+5}}\,(x^2+4x+5)' =$$

$$= \frac{2x+4}{2\,(x^2+4x+5)} = \frac{x+2}{x^2+4x+5}.$$

Замечания: 1. Данную функцию можно представить в виде $y = \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)$ и продифференцировать следующим образом:

$$\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)\right]' = \frac{1}{2\,(x^2+4x+5)}\,(x^2+4x+5)' = \frac{x+2}{x^2+4x+5}.$$

2. Если под знаком подлежащей дифференцированию логарифмической функции содержится выражение, допускающее логарифмирование (произведение, частное, степень, корень), то полезно сначала выполнить логарифмирование.

Пример 5. Найти производную функции $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Представив эту функцию в виде

$$y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2}[\ln(1-x) - \ln(1+x)],$$

найдем ее производную:

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2}{1-x^2} = \frac{1}{x^2-1}.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = e^{\sin^2 x}\cos 2x$.
Дифференцируя произведение и пользуясь формулой (15), находим

$$y' = (e^{\sin^2 x})'\cos 2x + e^{\sin^2 x}\,(\cos 2x)' =$$

$$= e^{\sin^2 x}\,2\sin x\cos x\cos 2x + e^{\sin^2 x}\,(-\sin 2x)\cdot 2 =$$

$$= e^{\sin^2 x}\sin 2x\cos 2x - 2e^{\sin^2 x}\sin 2x = e^{\sin^2 x}\sin 2x\,(\cos 2x - 2).$$

Найти производные функций:

467. $y = \lg 4x$. **468.** $y = \lg(x^2+a^2)$.

469. $y = 2\ln x + x - \frac{1}{x}$. **470.** $y = \frac{\ln x}{x}$.

471. $y = x^2 \ln x$.

472. $y = \ln(x^2 + 5x + 6)$.

473. $y = \ln(x^2 + a^2)$.

474. $y = \ln(x + a)^2$.

475. $y = \ln \dfrac{1 - x}{1 + x}$.

476. $y = \ln \dfrac{x - a}{x + a}$.

477. $y = \ln \sqrt{x^2 + a^2}$.

478. $y = \ln \sqrt{\dfrac{a - bx}{a + bx}}$.

479. $y = \ln \ln x$.

480. $y = \ln^2 x$.

481. $y = 4^x + x^4$.

482. $y = 5^{3x} + (3x)^5$.

483. $y = e^{\sin 2x}$.

484. $y = e^{\cos \frac{x}{3}}$.

485. $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$.

486. $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

487. $y = e^{x^2}$.

488. $y = e^{-x^3}$.

489. $y = a^{\sin \frac{x}{4}}$.

490. $y = a^{\sin^2 x}$.

491. $y = \dfrac{1 + 2e^x}{1 - 2e^x}$.

492. $y = \dfrac{a + be^x}{a - be^x}$.

493. $y = \ln \dfrac{ae^x}{bx^2 + c}$.

494. $y = \ln \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

§ 23. Производные обратных тригонометрических функций

Основные формулы:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}; \tag{17}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2};$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

Для сложных функций:

$$(\arcsin z)' = \frac{z'}{\sqrt{1 - z^2}}; \tag{18}$$

$$(\arccos z)' = -\frac{z'}{\sqrt{1 - z^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} z)' = \frac{z'}{1 + z^2}; \tag{19}$$

$$(\operatorname{arcctg} z)' = -\frac{z'}{1 + z^2}. \tag{20}$$

Пример 1. Найти производную функции $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$. Дифференцируя данную функцию, получаем

$$(\arcsin x + \sqrt{1-x^2})' = (\arcsin x)' + (\sqrt{1-x^2})' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(1-x^2)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = \sqrt{1-x^2}\arccos x$. Дифференцируя произведение и используя формулу (17), находим

$$(\sqrt{1-x^2}\arccos x)' = (\sqrt{1-x^2})'\arccos x + \sqrt{1-x^2}(\arccos x)' =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x - \sqrt{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= -\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\right).$$

Пример 3. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$. Дифференцируем почленно и используем формулу (19):

$$\left[\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)\right]' = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)' + \frac{1}{2}[\ln(x^2+a^2)]' =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\left(\frac{x}{a}\right)' + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+a^2}(x^2+a^2)' =$$

$$= \frac{a}{x^2+a^2} + \frac{x}{x^2+a^2} = \frac{x+a}{x^2+a^2}.$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{2x-1}$. По формуле (20) находим

$$(\operatorname{arcctg}\sqrt{2x-1})' = -\frac{(\sqrt{2x-1})'}{1+(\sqrt{2x-1})^2} =$$

$$= -\frac{1}{1+2x-1}\cdot\frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = -\frac{1}{2x\sqrt{2x-1}}.$$

Пример 5. Найти производную функции $y = \arcsin\frac{1}{x}$.

С помощью формулы (18) получаем

$$\left(\arcsin\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$.

По формуле (19) находим

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)' =$$

$$= \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2}\left[\frac{-1(1+x)-1(1-x)}{(1+x)^2}\right] =$$

$$= \frac{-2}{2+2x^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Найти производные функций:

495. $y = \arcsin 8x$.

496. $y = \arccos\dfrac{x}{3}$.

497. $y = \arcsin\dfrac{1}{x^2}$.

498. $y = \arccos\dfrac{1}{x^2}$.

499. $y = \arccos\sqrt{x}$.

500. $y = \arcsin\sqrt{1-2x}$.

501. $y = \arccos x^3$.

502. $y = \arcsin x^2$.

503. $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a}$.

504. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}$.

505. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

506. $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$.

507. $y = \dfrac{\operatorname{arcctg} x}{1+x^2}$.

508. $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$.

509. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

510. $y = \operatorname{arcctg} x^2$.

§ 24. Производная неявной функции

Функция y от аргумента x называется *неявной,* если она задана уравнением

$$F(x, y) = 0, \tag{21}$$

не разрешенным относительно зависимой переменной.

Чтобы найти производную y' от неявной функции, нужно продифференцировать по x обе части уравнения (21), рассматривая y как функцию x. Из полученного уравнения находится искомая производная y'.

Пример 1. Найти производную неявной функции $x^2+y^2-a^2=0$.

Считая y функцией от x и дифференцируя y как сложную функцию, получаем

$$(x^2+y^2-a^2)' = 0; \quad 2x + 2y\cdot y' = 0,$$

откуда

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Замечание. В этом примере тот же результат можно получить и другим способом. Разрешив исходное уравнение относительно y, найдем явные функции $y_1 = +\sqrt{a^2 - x^2}$, $y_2 = -\sqrt{a^2 - x^2}$. Дифференцируя эти функции, получим

$$y_1' = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}(a^2 - x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y_1}; \quad y_2' = -\frac{x}{y_2}.$$

Отметим, что переход от неявной функции $F(x, y) = 0$ к явной $y = f(x)$ не всегда возможен.

Пример 2. Найти производную неявной функции $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.
Дифференцируя, получаем

$$3x^2 + 3y^2y' - 3(x'y + xy') = 0; \quad x^2 + y^2y' - y - xy' = 0;$$

$$x^2 - y + y'(y^2 - x) = 0.$$

Из последнего уравнения находим $y' = \dfrac{x^2 - y}{x - y^2}$.

Пример 3. Вычислить значение производной неявной функции $xy^2 = 4$ в точке M (1; 2).
Найдем сначала производную:

$$x'y^2 + x2yy' = 0; \quad y' = -\frac{y}{2x}.$$

Подставляя в правую часть последнего равенства значения $x = 1$, $y = 2$, получаем

$$y' = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1.$$

Пример 4. Найти x_t' при $t = 1$, если $t \ln x - x \ln t = 1$.
Это уравнение определяет x как неявную функцию t. Дифференцируем его по t:

$$t_t' \ln x + t\frac{1}{x}x_t' - \left(x_t' \ln t + x\frac{1}{t}\right) = 0.$$

Так как $t_t' = 1$, то

$$\ln x + \frac{t}{x}x_t' - x_t' \ln t - \frac{x}{t} = 0; \quad x_t'\left(\frac{t}{x} - \ln t\right) - \left(\frac{x}{t} - \ln x\right) = 0,$$

откуда

$$x_t' = \frac{\dfrac{x}{t} - \ln x}{\dfrac{t}{x} - \ln t}.$$

Чтобы найти x_t' при $t = 1$, необходимо определить еще значение x, соответствующее данному значению t. Подставляя $t = 1$ в исходное уравнение, получаем $1 \cdot \ln x - x \ln 1 = 1$, откуда $\ln x = 1$, следовательно, $x = e$.

Подставив значения t, x в формулу для производной, получим

$$x'_t = \frac{\frac{e}{1} - 1}{\frac{1}{e} - 0} = \frac{e-1}{\frac{1}{e}} = e(e-1).$$

Найти производные неявных функций:

511. $x^2 + y^2 - 4xy = 0$.

512. $xy^2 + x^2y = 2$.

513. $xy + \sin y = 0$.

514. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

515. $e^y + x = y$.

516. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

517. $\ln y - 2x = 0$.

518. $y^2 + x^4 = x^2$.

519. Найти y' в точке M (1; 1), если $\frac{y}{x} + xy = 2$.

520. Найти y' при $y = 0$, если $x\cos y - \sin y + \sin 2y = 1$.

§ 25. Производные высших порядков

Производной второго порядка или *второй производной* функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной $y' = f'(x)$ и обозначается символами: $y'' = (y')'$, или $f''(x) = [f'(x)]'$, или $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx}$.

Механический смысл второй производной. Если $x = f(t)$—закон прямолинейного движения точки; то $x'' = f''(t)$ есть ускорение этого движения в данный момент времени t.

Аналогично определяются и обозначаются производные третьего, четвертого и других порядков: $y''' = (y'')' = [f''(x)]'$, $y^{IV} = (y''')'$, ..., $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$.

Пример 1. Найти производную третьего порядка функции $y = x^2 + 3x + 2$.
Последовательно дифференцируя, получаем:

$$y' = (x^2 + 3x + 2)' = 2x + 3; \quad y'' = (2x + 3)' = 2; \quad y''' = 2' = 0.$$

Пример 2. Найти производную четвертого порядка функции $y = \cos x$.
Последовательно дифференцируя, находим

$$y' = -\sin x; \quad y'' = -\cos x; \quad y''' = \sin x; \quad y^{IV} = \cos x.$$

Пример 3. Найти $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{IV}(0)$, если $f(x) = \sin 2x$.

Находим общие выражения для первых четырех производных:

$$f'(x) = 2\cos 2x; \quad f''(x) = -4\sin 2x; \quad f'''(x) = -8\cos 2x; \quad f^{IV}(x) = 16\sin 2x.$$

При $x = 0$ получаем

$$f(0) = 0; \quad f'(0) = 2; \quad f''(0) = 0; \quad f'''(0) = -8; \quad f^{IV}(0) = 0.$$

Найти производные второго порядка от функций:

521. $y = (x^2 - 1)^2$.

522. $y = (ax^2 - b)^2$.

523. $y = a^x$. **524.** $y = \ln x$.

525. $y = \operatorname{tg} x$. **526.** $y = \operatorname{ctg} x$.

Найти производные третьего порядка от функций:

527. $r = a(\varphi - \sin\varphi)$. **528.** $r = a(1 - \cos\varphi)$.

529. $s = a\sin 4t$. **530.** $s = a\cos 3t$.

Найти значения при $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ производных четвертого порядка от функций:

531. $f(x) = x^5 - x^4 + x^3 + x^2 + x$. **532.** $y = x^6 - x^5 + 5x + 3$.

§ 26. Разные примеры на дифференцирование

Производная функции, заданной параметрически

$$x = \varphi_1(t); \quad y = \varphi_2(t),$$

находится по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\varphi'_2(t)}{\varphi'_1(t)}, \tag{22}$$

если $\varphi'_1(t) \neq 0$.

Производная функции $y = u^v$, где u, v—дифференцируемые функции от x, находится с помощью предварительного логарифмирования.

Пример 1. Найти производную y'_x функции, заданной параметрически: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

Определяем производные по t:

$$x'_t = -a\sin t; \quad y'_t = b\cos t.$$

Подставляя найденные выражения в формулу (22), получаем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t.$$

Пример 2. Найти производную y'_x функции $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$ при $t = 0$.

Дифференцируя, получаем

$$x'_t = e^t\cos t - e^t\sin t; \quad y'_t = e^t\sin t + e^t\cos t;$$

$$y'_x = \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t}; \qquad y'_x(0) = 1.$$

Пример 3. Найти производную функции $y = x^x$.

Логарифмируем по основанию e:

$$\ln y = x\ln x.$$

Дифференцируя, находим

$$\frac{1}{y}y' = 1\cdot\ln x + x\frac{1}{x}; \qquad \frac{y'}{y} = \ln x + 1,$$

откуда

$$y' = y(\ln x + 1).$$

Подставляя в последнее равенство выражение для y, получаем

$$y' = x^x(\ln x + 1).$$

Пример 4. Найти производную функции $y = x^{\sin x}$
Логарифмируя по основанию e, получаем

$$\ln y = \sin x \ln x.$$

Дифференцируя, находим

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x},$$

откуда

$$y' = y\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

Следовательно,

$$y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

Пример 5. Найти вторую производную функции, заданной параметрически: $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$.
По определению

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

а по формуле (22)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Дифференцируя это равенство по t и имея в виду, что t есть функция от x, получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx}.$$

Поскольку

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2};$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}},$$

то

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} \quad \text{или} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\varphi_1'(t)\,\varphi_2''(t)-\varphi_2'(t)\,\varphi_1''(t)}{[\varphi_1'(t)]^3}.$$

Пример 6. Найти вторую производную функции $x=a\cos t$, $y=b\sin t$. Так как

$$\frac{dx}{dt}=-a\sin t;\quad \frac{d^2x}{dt^2}=-a\cos t;\quad \frac{dy}{dx}=b\cos t;\quad \frac{d^2y}{dt^2}=-b\sin t,$$

то по формуле, полученной в примере 5, находим

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(-a\sin t)(-b\sin t)-(b\cos t)(-a\cos t)}{(-a\sin t)^3}=-\frac{b}{a^2}\frac{1}{\sin^3 t}.$$

Найти производные y_x' от функций, заданных параметрически:

533. $x=at\cos t$, $y=at\sin t$. **534.** $x=a\cos^2 u$, $y=a\cos u\sin u$.

535. $x=b\cos^3 u$, $y=b\sin^3 u$. **536.** $x=\operatorname{tg} t$, $y=-\operatorname{ctg} t$.

537. $x=t^2$, $y=4t$ при $t=1$.

538. $x=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$, $y=\frac{b}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)$ при $t=2$.

Найти вторые производные функций, заданных параметрически:

539. $x=\frac{a-t}{a+t}$, $y=\frac{2t}{a+t}$. **540.** $x=a(1-\cos t)$, $y=at$.

541. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$. **542.** $x=a\ln t$, $y=\frac{a}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$.

543. Найти производную степенно-показательной функции $y=u^v$, где u, v—дифференцируемые функции от x.

Найти производные степенно-показательных функций:

544. $y=x^{\cos x}$. **545.** $y=(\sin x)^x$.

546. $y=\sqrt[x]{x}$. **547.** $y=x^{\sqrt{x}}$.

548. $y=(\operatorname{arcctg} x)^x$. **549.** $y=(\sin x)^{\cos x}$.

550. Показать, что функция $y=\cos x$ удовлетворяет уравнению $y''+y=0$.

551. Показать, что функция $y=x^2$ удовлетворяет уравнению $x^2y''-y'-2y+2x=0$.

Найти первые производные функций:

552. $y=\frac{4x+1}{9-x^2}$. **553.** $y=\frac{2x-3}{x^2+5x+6}$.

554. $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x$.

555. $y = 1 + \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$.

556. $y = \cos\frac{1}{x}$.

557. $y = \cos\frac{1-x}{1+x}$.

558. $y = \frac{\sin 3x}{1+\cos 3x}$.

559. $y = \cos\sqrt{x} + \sqrt{x}\sin\sqrt{x}$.

560. $y = 1 - \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x$.

561. $y = \ln\sqrt{\operatorname{ctg} x}$.

562. $y = \operatorname{tg} x^2$.

563. $y = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}$.

564. $y = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2$.

565. $y = \arcsin\frac{x-1}{x\sqrt{2}}$.

566. $y = \arccos x^2$.

567. $y = \arccos\sqrt{1-2x}$.

568. $y = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

569. $y = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1+x^2})$.

570. $y = e^{\sin^3 x}$.

571. $y = e^{2x}(2x-1)$.

572. $y = \ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

573. $y = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

574. $y = \ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

575. $y = \ln\cos^2 x$.

576. $y = \ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

577. $y = \ln\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$.

578. $y = e^x(x^3 - 2x^2 + 6x - 6)$.

579. $y = \frac{x\sin x + \cos x}{\sin x - x\cos x}$.

§ 27. Дифференциал функции

Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется произведение ее производной на приращение независимой переменной:

$$dy = f'(x)\,\Delta x. \tag{23}$$

В частности, при $f(x) = x$ получаем

$$\Delta x = 1 \cdot \Delta x; \quad dx = \Delta x,$$

т. е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной.

Формулу (23) можно, следовательно, написать так:

$$dy = f'(x)\,dx, \tag{24}$$

откуда

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Дифференциал функции $y = f(x)$ равен приращению LN ординаты касательной ML, проведенной к графику этой функции в точке M, когда аргумент получает приращение Δx (рис. 33, *а*, *б*).

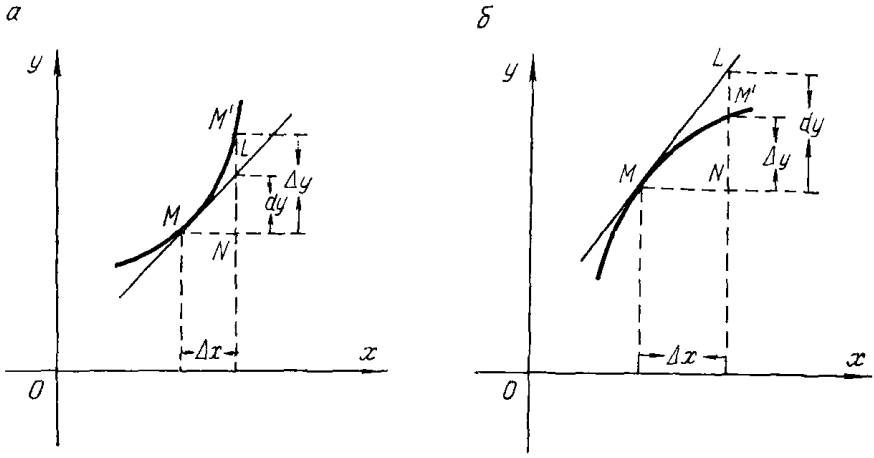


Рис. 33

Из определения производной и дифференциала следует, что $\Delta y = dy + \varepsilon\Delta x$, где $\varepsilon \to 0$, когда $\Delta x \to 0$, т. е. дифференциал функции отличается от приращения на бесконечно малую высшего порядка по сравнению с чем $\Delta x = dx$.

При малых Δx справедлива приближенная формула

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x$$

или

$$f(x + \Delta x) \approx f'(x)\,\Delta x + f(x). \tag{25}$$

Если u, v, w—дифференцируемые функции от x, а c—постоянная, то верны следующие свойства дифференциалов:

$$dc = 0;$$

$$d(u + c) = du;$$

$$d(u - v + w) = du - dv + dw;$$

$$d(cu) = c\,du;$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du;$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2};$$

$$df(u) = f'(u)\,du; \quad u = \varphi(x).$$

Пример 1. Найти дифференциал функции $y = e^{2x}$.

По формуле (24) находим

$$dy = d(e^{2x}) = (e^{2x})'\,dx = e^{2x}\cdot 2dx; \quad dy = 2e^{2x}dx.$$

Пример 2. Найти дифференциал функции $y = 2x^2 + 8x + 5$.
На основании формулы (24) получаем

$$dy = (2x^2 + 8x + 5)'dx = (4x + 8)\,dx = 4(x + 2)\,dx.$$

Пример 3. Найти дифференциал функции $r = a(\varphi + \sin\varphi)$.
В данном случае функция обозначена буквой r, аргумент—буквой φ. Формула (24) запишется так: $dr = r'd\varphi$. На основании этой формулы находим

$$dr = [a(\varphi + \sin\varphi)]'\,d\varphi = a(1 + \cos\varphi)\,d\varphi.$$

Пример 4. Вычислить значение дифференциала функции $y = x^4 + 2x^2 + 4x + 3$, когда x изменяется от 0 до 0,1.
Прежде всего находим общее выражение для дифференциала этой функции:

$$dy = 4(x^3 + x + 1)\,dx.$$

Подставляя значения $x = 0$, $dx = \Delta x = 0{,}1 - 0 = 0{,}1$ в последнюю формулу, получаем искомое значение дифференциала

$$dy = 4(0 + 0 + 1)\cdot 0{,}1 = 0{,}4.$$

Пример 5. Заменив приращение функции дифференциалом, приближенно найти arctg 1,02.
Формула (25) применительно к данной функции перепишется в виде

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + \frac{1}{1 + x^2}\,\Delta x.$$

В нашем случае $x + \Delta x = 1{,}02$, $x = 1$, $\Delta x = 0{,}02$. Подставляя эти значения в формулу, получаем

$$\operatorname{arctg} 1{,}02 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{1}{1 + 1^2}\cdot 0{,}02 = \frac{\pi}{4} + 0{,}01 \approx 0{,}795.$$

Следовательно, $\operatorname{arctg} 1{,}02 \approx 0{,}795$.

Найти дифференциалы функций:

580. $y = x^3 + 3x^2 + 3x$.

581. $y = \frac{1}{5}\,x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x$.

582. $y = (ax^2 - b)^2$.

583. $y = (ax + b)^3$.

584. $y = \frac{1}{1 + x}$.

585. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

586. $y = \sin^2 2x$.

587. $y = \operatorname{tg}^2 2x$.

588. $y = \sqrt{9 - x^2}$.

589. $y = \sqrt{x^3 + 6x^2}$.

590. $y = a^{\cos 3x}$.

591. $y = e^{\sin 4x}$.

592. $y = \ln(x^2 + a^2)$.

593. $y = \ln^2 x$.

594. $r = \varphi \sin\varphi$.

595. $r = \varphi\cos\varphi - \sin\varphi$.

596. $s = a\cos^3 t$. **597.** $s = b\sin^3 t$.

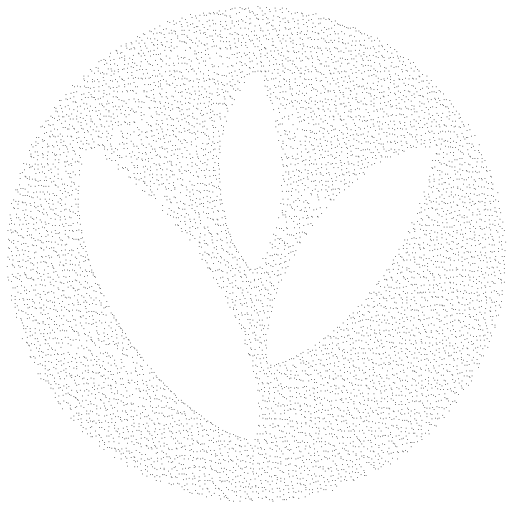
598. $y = x^2$, $x = 2t - t^2$. **599.** $y = x^3$, $x = t^2 - 1$.

600. Дана функция $y = x^4 + 4x$. Найти Δy и dy, сравнить их между собой, если: 1) $x = 1$, $\Delta x = 1$; 2) $x = 1$, $\Delta x = 0{,}1$.

601. Вычислить приближенно приращение функции $y = x^2 + 2x + 3$, когда x изменяется от 2 до 1,98.

602. Сторона квадрата $x = 10$ см. На сколько приближенно увеличится площадь этого квадрата, если сторона удлинится на 2 мм?

603. Заменив приращение функции дифференциалом, приближенно найти: 1) $\sin 31°$; 2) $\operatorname{arctg} 1{,}05$; 3) $e^{0,2}$; 4) $\ln 1{,}01$.



Глава VI. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Производная находит многочисленные приложения. С ее помощью можно найти касательную к кривой в данной точке, определить скорость и ускорение неравномерного движения в данный момент времени. Производная широко применяется при исследовании функций, являющихся переменными величинами. С переменными же величинами постоянно встречаются при изучении законов природы.

§ 28. Касательная и нормаль к плоской кривой. Кривизна кривой. Скорость и ускорение

Касательной к кривой $y = f(x)$ в ее точке $M_0(x_0; y_0)$ называется предельное положение M_0T секущей MM_0, когда точка M стремится к M_0 вдоль данной кривой (рис. 34).

Нормалью к кривой в точке $M_0(x_0; y_0)$ называется прямая, проходящая через M_0 и перпендикулярная к касательной в данной точке M_0 (см. рис. 34).

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{1}$$

Уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \tag{2}$$

Кривизной кривой в ее точке M называется предел абсолютной величины отношения угла $\Delta\alpha$ между касательными в точках M и N кривой к длине дуги $MN = \Delta s$, когда $N \to M$ (рис. 35), т. е.

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|,$$

где угол α выражен в радианах.

Кривизна кривой $y = f(x)$ вычисляется по формуле

$$k = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}. \tag{3}$$

Пример 1. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $f(x) = x^2 + 4x + 5$ в точке $M_0(-1; 2)$.

Находим производную данной функции и ее значение при $x_0 = -1$: $f'(x) = 2x + 4$; $f'(x_0) = f'(-1) = 2$.

Подставляя значения $x_0 = -1$, $y_0 = 2$, $f'(x_0) = 2$ в уравнения (1) и (2), получаем уравнение касательной:

$$y - 2 = 2(x + 1); \quad 2x - y + 4 = 0$$

и уравнение нормали:

$$y-2=-\frac{1}{2}(x+1),\ x+2y-3=0.$$

Пример 2. Составить уравнения касательной и нормали к гиперболе $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ в точке M_0 (4; 6).

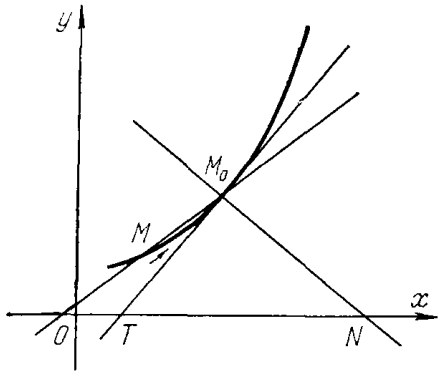


Рис. 34

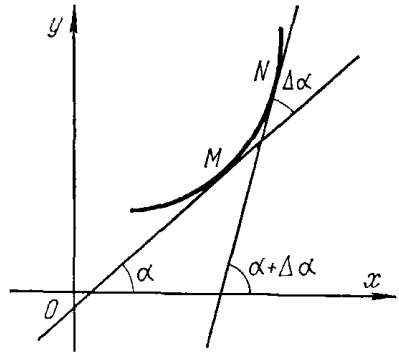


Рис. 35

Находим производную неявной функции $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}-1=0$: $\frac{2x}{4}-\frac{2yy'}{12}=0$, откуда

$$y'(x)=3\frac{x}{y};\ y'(x_0)=y'(4)=3\cdot\frac{4}{6}=2.$$

Подставляя значения $x_0=4$, $y_0=6$, $y'(x_0)=2$ в формулы (1) и (2), получаем уравнение касательной:

$$y-6=2(x-4);\ 2x-y-2=0$$

и уравнение нормали:

$$y-6=-\frac{1}{2}(x-4);\ x+2y-16=0.$$

Пример 3. Составить уравнения касательной и нормали к кривой, заданной параметрически, $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$: 1) в произвольной точке; 2) при $t=\frac{\pi}{2}$.

Уравнение касательной (1) можно написать в виде

$$Y-y=y'_x(x)(X-x), \tag{4}$$

где $(x;\ y)$ — координаты точки кривой, $(X;\ Y)$ — координаты точки касательной.

Находим производную y_x по формуле (22) гл. V:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{2\sin t}{2(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Подставляя выражения для x, y и y'_x в формулу (4), получаем уравнение касательной к данной кривой в произвольной точке:

$$Y - 2(1-\cos t) = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,[X - 2(t-\sin t)].$$

При $t = \frac{\pi}{2}$ из последнего уравнения находим

$$Y - 2 = 1 \cdot \left[X - 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right];\ Y - 2 = X - \pi + 2$$

или

$$X - Y - \pi + 4 = 0.$$

Замечание. Данная кривая называется *циклоидой* (см. приложение 4).

Пример 4. Вычислить кривизну линии $y = x^3 - 3x^2$ в точке, для которой $x = 0$.

Находим первую и вторую производные данной функции:

$$y' = 3x^2 - 6x;\ y'' = 6x - 6,$$

а также их значения при $x = 0$:

$$y'(0) = 0;\ y''(0) = -6.$$

По формуле (3) получаем

$$k = \frac{|-6|}{(1+0)^{3/2}} = 6.$$

Пример 5. Под каким углом кривая $y = e^x$ пересекает ось Oy?

Углом между кривой линией и прямой называется угол между этой прямой и касательной к кривой в точке их пересечения.

Найдем точку пересечения кривой $y = e^x$ с осью Oy. Так как ось Oy имеет уравнение $x = 0$, то точка пересечения определится из системы уравнений $y = e^x$, $x = 0$, откуда $y = 1$. Следовательно, M (0; 1) — точка пересечения. Угловой коэффициент касательной в данной точке равен значению производной функции в этой точке:

$$f'(x) = e^x,\ f'(0) = e^0 = 1;\ \operatorname{tg}\varphi = 1;\ \varphi = 45°.$$

Итак, угол, образуемый касательной с осью Ox, равен 45°. Очевидно, с осью Oy касательная образует такой же угол.

Пример 6. Под каким углом кривая $y = e^x$ пересекает ось Oy?

Углом между двумя линиями в точке их пересечения называют угол между касательными к линиям в этой точке.

Найдем точки пересечения данных линий. Решая систему их уравнений

$$\left.\begin{aligned} y &= x^2; \\ y^2 &= x, \end{aligned}\right\}$$

получим две точки пересечения O (0; 0), M (1; 1).

Уравнения касательных к кривым в произвольной точке:

$$Y-y=2x(X-x);$$

$$Y-y=\pm\frac{1}{2\sqrt{x}}(X-x),$$

в частности, в точке $O(0;\ 0)$: $Y=0$, $X=0$, а в точке $M(1;\ 1)$: $Y-1=2(X-1)$; $Y-1=\frac{1}{2}(X-1)$.

Как видно из уравнений, касательные к кривым в точке O (0; 0) совпадают с координатными осями, поэтому угол между кривыми равен 90°. В точке M (1; 1) угол между линиями определяется по формуле (4) гл. II:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{3}{4};\quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{4};\quad \varphi\approx 36°52'.$$

Пример 7. Тело движется вдоль прямой Ox по закону $x=t-\sin t$. Найти скорость и ускорение движения при $t=\frac{\pi}{2}$.

В силу механического значения первой и второй производных находим для любого момента времени t:

$$v=\frac{dx}{dt}=1-\cos t\ \text{(скорость)};$$

$$w=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=\sin t\ \text{(ускорение)}.$$

При $t=\frac{\pi}{2}$ получаем $v=1$, $w=1$.

604. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^2-6x+7$ в точке $M(1;\ 2)$.

605. Найти уравнения касательной и нормали к кривой $4x^2+9y^2=72$ в точке $M(3;\ 2)$.

606. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x=2t$, $y=t^2$ при $t=1$.

607. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x=\sqrt{2}\cos t$, $y=\sqrt{2}\sin t$ при $t=\frac{\pi}{4}$.

608. В какой точке касательная к линии $y=x^3$ параллельна прямой $12x-y+5=0$?

609. В какой точке касательная к линии $y=x^2-4x+5$ перпендикулярна прямой $x+2y-8=0$?

610. Под каким углом синусоида $y=\sin 4x$ пересекает ось Ox в начале координат?

611. Какие углы образует кривая $y=x^2-x$ с осью Ox в точках пересечения с этой осью?

612. Под каким углом пересекаются линии $x^2+y^2=2$, $y=x^2$?

613. Показать, что кривые $y=x-x^2$, $y=x^2-x$ пересекаются под прямым углом.

614. Показать, что у астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ отрезок касательной, заключенный между осями координат, имеет постоянную величину, равную a.

615. Показать, что отрезок касательной к гиперболе $xy=a^2$, лежащий между координатными осями, в точке касания делится пополам.

616. Найти кривизну линии $x^2+y^2=a^2$ в ее произвольной точке.

617. Вычислить кривизну линии $y=e^x$ при $x=0$.

618. В какой точке параболы $x^2-2y=0$ кривизна равна $\frac{\sqrt{2}}{4}$?

619. Точка движется по прямой Ox по закону $x=t^3-9t^2+24t$. Найти скорость и ускорение движения. В какие моменты времени точка меняет направление движения?

620. Зависимость между количеством x вещества, полученного в результате некоторой химической реакции, и временем t выражается уравнением $x=A(1-e^{-kt})$. Найти скорость реакции.

§ 29. Возрастание и убывание функции. Экстремум функции. Точка перегиба

Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* в некотором промежутке, если для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих данному промежутку, из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ (рис. 36, *а*).

Функция называется *убывающей* в некотором промежутке, если для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих данному промежутку, из неравенства $x_1<x_2$ следует неравенство $f(x_1)>f(x_2)$ (рис. 36, *б*).

Достаточное условие возрастания (убывания) функции. Если в данном промежутке производная данной функции положительна, то функция в этом промежутке возрастает. Если производная функции в некотором промежутке отрицательна, то функция в этом промежутке убывает.

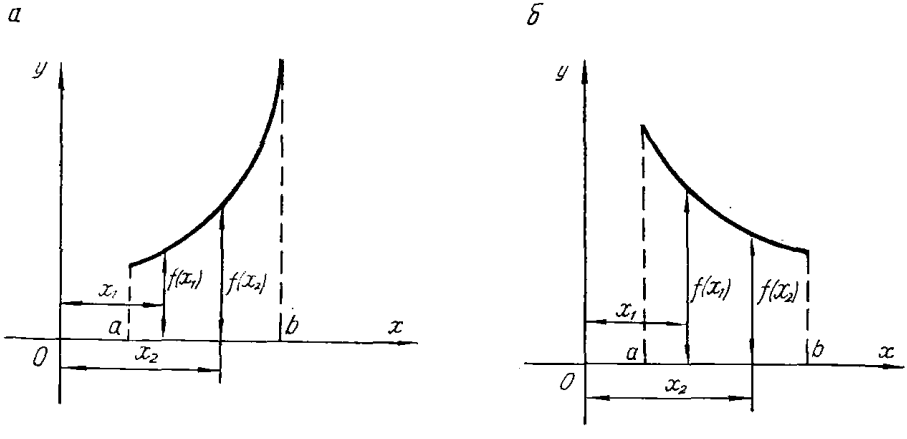


Рис. 36

Значение x_1 из области определения функции $f(x)$ называется *точкой максимума* этой функции, если существует такая δ-окрестность $]x_1-\delta;\ x_1+\delta[$ точки x_1, что для всех $x \neq x_1$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$; значение функции $f(x_1)$ называется при этом *максимумом функции* $f(x)$ и обозначается $\max f(x)$.

Значение x_2 из области определения функции $f(x)$ называется *точкой минимума* этой функции, если существует такая δ-окрестность $]x_2-\delta;\ x_2+\delta[$ точки x_2, что для всех $x \neq x_2$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_2)$; значение функции $f(x_2)$ называется при этом *минимумом функции* $f(x)$ и обозначается $\min f(x)$.

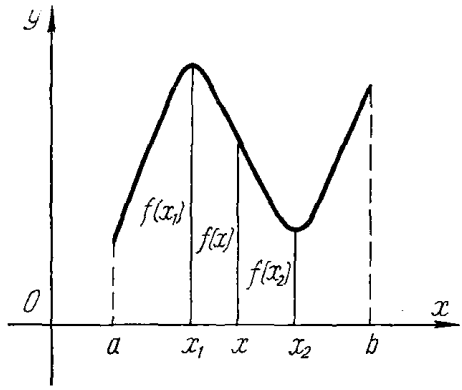


Рис. 37

Максимум и минимум функции называются *экстремумом* этой функции, а точки максимума и минимума — *точками экстремума* (рис. 37).

Достаточное условие экстремума. Первое правило. Если в точке x_0 производная функции $y = f(x)$ равна нулю и меняет знак при переходе через эту точку, то $f(x_0)$ — экстремум функции, причем: 1) функция имеет максимум при $x = x_0$, когда знак производной меняется с плюса на минус (т. е. $f'(x) > 0$, если $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, $f'(x) < 0$, если $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$); 2) функция имеет минимум при $x = x_0$, когда знак производной меняется с минуса на плюс (т. е. $f'(x) < 0$, если $x_0 - \varepsilon < x < x_0$, $f'(x) > 0$, если $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$).

Второе правило. Если в точке $x = x_0$ первая производная функции $y = f(x)$ равна нулю, а вторая производная отлична от нуля, то x_0 будет точкой экстремума, причем: 1) x_0—точка максимума, если $f''(x_0) < 0$; 2) x_0 — точка минимума, если $f''(x_0) > 0$.

Замечания 1. В случае $f''(x_0) = 0$ нужно обращаться к первому правилу.

2. Экстремум функции называют также *локальным экстремумом*, в отличие от *глобального экстремума* — наибольшего (наименьшего) значения, которое функция может принимать в области ее определения. Чтобы найти глобальный экстремум функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a;\ b]$, достаточно сравнить значения $f(a)$, $f(b)$ с ее значениями в точках локального экстремума на $[a;\ b]$ и выбрать наибольшее (наименьшее) из них.

График функции $y = f(x)$ называется *вогнутым вверх* (или *выпуклым вниз*) в промежутке $]a;\ b[$, если соответствующая дуга кривой расположена выше касательной, проведенной в любой точке $M(x;\ f(x))$ этой дуги (рис. 38, *а*).

График функции $y = f(x)$ называется *вогнутым вниз* (или *выпуклым вверх*) в промежутке $]a;\ b[$, если соответствующая дуга кривой расположена ниже касательной, проведенной в любой точке $M(x;\ f(x))$ этой дуги (рис. 38, *б*).

Достаточное условие вогнутости (выпуклости) кривой. Если вторая производная функции $y = f(x)$ положительна в промежутке $]a;\ b[$, то график этой функции вогнут вверх в данном промежутке. Если вторая производная $f''(x)$ отрицательна в промежутке $]a;\ b[$, то график функции $y = f(x)$ вогнут вниз в этом промежутке (сравните эти условия со вторым правилом нахождения экстремума).

Точкой перегиба непрерывной кривой называется ее точка, при переходе через которую кривая меняет свою вогнутость на выпуклость или наоборот (относительно, например, направления вниз).

Достаточное условие точки перегиба. Если для функции $y = f(x)$ вторая производная ее в точке x_0 равна нулю и меняет знак при переходе через эту точку, то $M(x_0;\ f(x_0))$ — точка перегиба.

Пример 1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$.

Данная функция имеет производную

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x^2 - x - 2).$$

Производная обращается в нуль, когда $x^2 - x - 2 = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Эти точки делят бесконечный интервал на три: $]-\infty; -1[$, $]-1; 2[$, $]2; +\infty[$. Исследуем знак производной в каждом из этих интервалов.

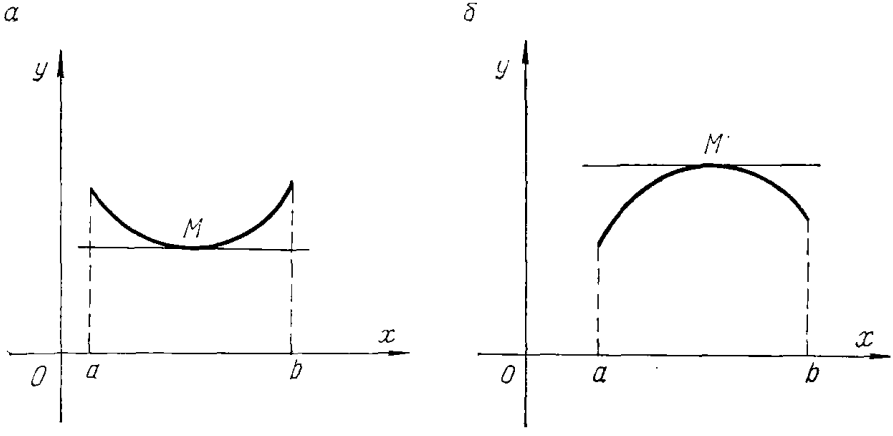


Рис. 38

Если $x < -1$, то $f'(x) = 3(x^2 - x - 2) = 3(x+1)(x-2) > 0$, так как $(x+1) < 0$ и $(x-2) < 0$. Следовательно, функция возрастает в промежутке $]-\infty; -1[$.

Если $-1 < x < 2$, то $f'(x) = 3(x+1)(x-2) < 0$, так как $(x+1) > 0$, $(x-2) < 0$, поэтому функция убывает в промежутке $]-1; 2[$.

Аналогично убеждаемся, что функция возрастает в промежутке $]2; +\infty[$.

Заметив, что $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, строим эскиз графика (рис. 39).

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{11}{2} \times x^2 - 6x + \frac{9}{4}$.

Находим первую и вторую производную:

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6; \quad f''(x) = 3x^2 - 12x + 11.$$

Точки экстремума ищем среди критических точек, т. е. точек, для которых $f'(x) = 0$. Первая производная обращается в нуль, когда

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0.$$

С помощью теоремы Безу можно установить, что $x = 1$ есть корень последнего уравнения. Заметив это и разложив левую часть уравнения на множители, получим

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3) = 0,$$

откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

Исследуем знак второй производной при этих значениях x:

$$f''(1)=3\cdot 1^2-12\cdot 1+11=2>0;$$

$$f''(2)=3\cdot 2^2-12\cdot 2+11=-1<0;$$

$$f''(3)=3\cdot 3^2-12\cdot 3+11=2>0.$$

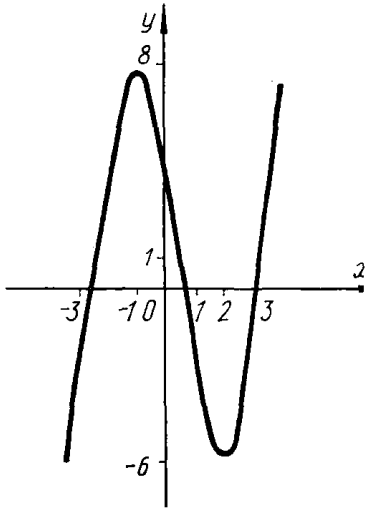


Рис. 39

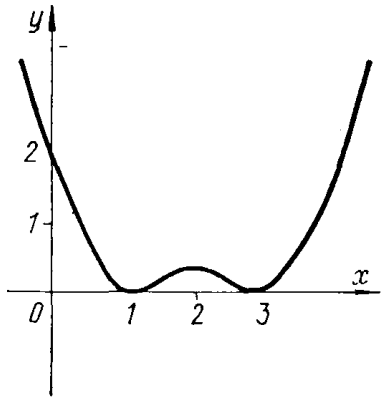


Рис. 40

Следовательно, $x=2$ есть точка максимума, $x=1$ и $x=3$ являются точками минимума. Найдем значения экстремумов:

$$\min f(x)=f(1)=\frac{1}{4}\cdot 1^4-2\cdot 1^3+\frac{11}{2}\cdot 1^2-6\cdot 1+\frac{9}{4}=0;$$

$$\max f(x)=f(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^4-2\cdot 2^3+\frac{11}{2}\cdot 2^2-6\cdot 2+\frac{9}{4}=\frac{1}{4};$$

$$\min f(x)=f(3)=\frac{1}{4}\cdot 3^4-2\cdot 3^3+\frac{11}{2}\cdot 3^2-6\cdot 3+\frac{9}{4}=0.$$

График функции изображен на рис. 40.

Пример 3. Найти точку перегиба графика функции $f(x)=x^3$.

Производные функции имеют вид: $f'(x)=3x^2$, $f''(x)=6x$. Вторая производная равна нулю при $x=0$ и меняет знак в этой точке: $f''(x)<0$, если $x<0$, $f''(x)>0$, когда $x>0$.

Следовательно, $x=0$ есть абсцисса точки перегиба, ордината ее определяется из уравнения $y=x^3$. Таким образом, точка перегиба совпадает с началом координат.

Так как $f''(x)<0$ при $x<0$ и $f''(x)>0$ при $x>0$, то график функции является выпуклым вверх при $x<0$ и выпуклым вниз при $x>0$. Кривая изображена на рис. 41.

Пример 4. Данное положительное число a разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Обозначим через x первое слагаемое, тогда второе равно $a-x$. Их произведение представляет функцию от x:

$$f(x) = x(a-x) = ax - x^2.$$

Исследуем эту функцию. Найдем производные:

$$f'(x) = a - 2x;\ f''(x) = -2.$$

Первая производная равна нулю, когда $a-2x=0$ или $x=\frac{a}{2}$. Так как вторая производная отрицательна, то при $x=\frac{a}{2}$ функция принимает наибольшее значение. Второе слагаемое также равно $\frac{a}{2}$.

Замечание. Областью определения функции является отрезок $[0;\ a]$. На концах отрезка значения функции равны нулю. Следовательно, глобальный максимум функции совпдает с локальным максимумом; глобальный минимум равен нулю.

Пример 5. При каких размерах коробка (без крышки), изготовленная из квадратного листа картона со стороной a, имеет наибольшую вместимость?

Для изготовления коробки необходимо по углам листа вырезать квадраты и загнуть выступы получившейся крестообразной фигуры. Обозначим сторону вырезанного квадрата через x, тогда сторона основания коробки будет $a-2x$. Объем коробки выразится функцией

$$V = (a-2x)^2\ x = (a^2 - 4ax^2 + 4x^2)\ x = a^2x - 4ax^2 + 4x^3,$$

которая определена в промежутке $\left[0;\ \frac{a}{2}\right]$.

Дифференцируя функцию V, получаем:

$$V' = a^2 - 8ax + 12x^2;\ V'' = -8a + 24x.$$

$V'=0$, когда $a^2 - 8ax + 12x^2 =$

$= 0$, откуда $x_1 = \frac{a}{2}$; $x_2 = \frac{a}{6}$.

Полученные значения x подставляем в выражение для второй производной:

$$V''\left(\frac{a}{2}\right) = -8a + 12a = 4a > 0;$$

$$V''\left(\frac{a}{6}\right) = -8a + 6a = -2a < 0.$$

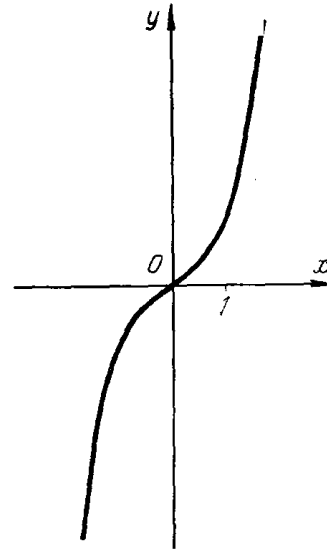


Рис. 41

Следовательно, наибольший объем будет при $x = \frac{a}{6}$. Основанием коробки является квадрат со стороной $\frac{2}{3}a$.

Замечание. На концах отрезка $[0; a/2]$ значения функции равны нулю. Глобальный максимум совпадает с локальным.

Найти промежутки возрастания и убывания функций:

621. $y = x^2 + 8x + 7$. **622.** $y = 3 + 2x - x^2$.

623. $y = x^3 - 3x + 5$. **624.** $y = 6 - 3x^2 - x^3$.

625. $y = \ln x$. **626.** $y = e^x$.

627. $y = x^4 - 2x^2$. **628.** $y = 4x^2 - x^4 - 3$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функций в промежутке $[-2; 2]$:

629. $y = -x^2$. **630.** $y = -x^3$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функций:

631. $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$. **632.** $y = \frac{1}{1 + x^2}$.

Исследовать на экстремум функции:

633. $y = (x + 1)^2 (x - 2)$. **634.** $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$.

635. $y = (x^2 - 3)^2$. **636.** $y = \frac{(1 - x^2)^2}{4}$.

637. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$. **638.** $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

639. $y = x \ln x$. **640.** $y = \frac{\ln x}{x}$.

Найти точки перегиба графиков функций:

641. $y = \frac{3}{8}x^4 - x^3 + 2$. **642.** $y = x^3 + \frac{x^4}{4}$

643. Среди всех прямоугольников, имеющих данный периметр $2a$, найти тот, площадь которого наибольшая.

644. Какой из прямоугольных треугольников с заданным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

645. Боковые стороны и меньшее основание трапеции равны по 10 см. Определить ее большее основание так, чтобы площадь трапеции была наибольшей.

646. В данный эллипс вписать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными осям эллипса.

647. Открытый сосуд состоит из цилиндра, заканчивающегося снизу полусферой; толщина стенок постоянна. Каковы должны быть размеры сосуда, чтобы при данной вместимости на его изготовление пошло минимум материала?

648. Определить, какова должна быть наименьшая высота $h=OB$ двери вертикальной башни $ABCD$ (рис. 42), чтобы через эту дверь в башню можно было внести жесткий стержень MN длины l, конец которого M скользит вдоль горизонтальной прямой AB. Ширина башни $d<l$.

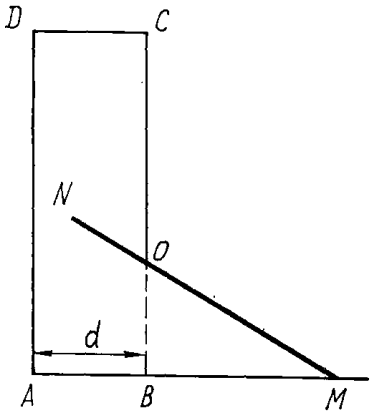


Рис. 42

649. Вблизи завода A проводится железная дорога к городу B по намеченной прямой. Под каким углом α к проектируемой железной дороге нужно провести шоссе от завода A, чтобы доставка грузов из A в B была наиболее дешевой, если стоимость перевозки по шоссе в 10 раз дороже, чем по железной дороге?

650. Лампа висит над центром круглого стола радиусом r. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшая? Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.

§ 30. Построение графиков функций. Асимптоты кривой

Асимптотой кривой называется прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее от начала координат. Если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty, \tag{5}$$

то прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$.

Если существуют пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k; \quad \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = b, \tag{6}$$

то прямая $y=kx+b$ есть *наклонная асимптота* кривой $y=f(x)$.

Если в правой части уравнения кривой $y=f(x)$ можно выделить линейную часть

$$y = f(x) = kx + b + \alpha(x), \tag{7}$$

где $\alpha(x)\to 0$, когда $x\to\pm\infty$, то прямая $y=kx+b$ является асимптотой.

Исследование функции можно проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать изменение функции при x, стремящемся к концам промежутков области определения.

3. Найти точки экстремума и промежутки возрастания и убывания функции.

4. Вычислить значения экстремумов.

5. Определить интервалы выпуклости и вогнутости графика, найти точки перегиба.

6. Найти точки пересечения графика функции с координатными осями.

7. Найти асимптоты графика функции.

По результатам исследования функции можно построить математически грамотный эскиз ее графика.

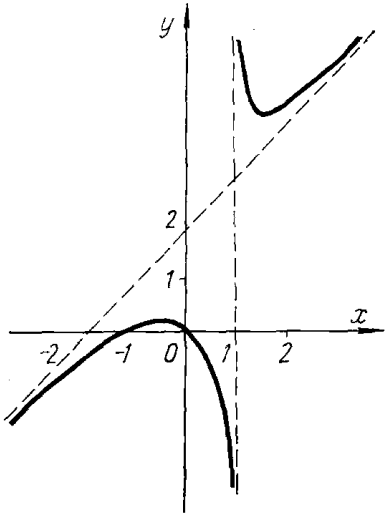


Рис. 43

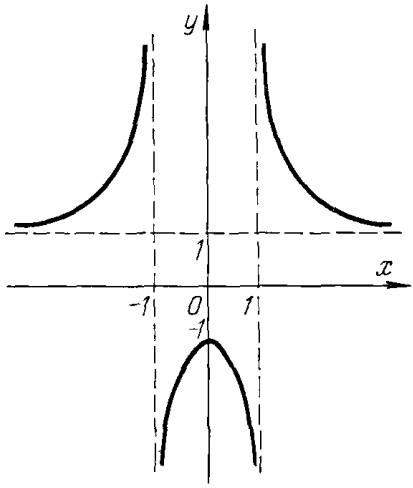


Рис. 44

Если исследуемая функция четная, т. е. такая, что $f(-x)=f(x)$, достаточно исследовать функцию и построить ее график для положительных значений аргумента из области определения функции. При отрицательных значениях аргумента график функции строится на том основании, что график четной функции симметричен относительно оси ординат. Если функция $y=f(x)$ — нечетная, т. е. такая, что $f(-x)=-f(x)$, то ее достаточно исследовать при положительных значениях аргумента. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Иногда порядок исследования целесообразно выбирать, исходя из конкретных особенностей данной функции.

Пример 1. Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{x^2+x}{x-1}$.

Так как $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x}{x-1}=\infty$, то прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой [см. формулу (5)].

Далее,

$$y=\frac{x^2+x}{x-1}=x+2+\frac{2}{x-1}=x+2+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to\infty$. Таким образом, прямая $y=x+2$ [в соответствии с формулой (7)] будет асимптотой. Кривая изображена на рис. 43.

Пример 2. Найти асимптоты кривой $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

График этой функции имеет две вертикальные асимптоты $x=-1$, $x=1$, так как

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\infty.$$

Выделяя целую часть функции путем непосредственного деления или с помощью простых преобразований, получаем

$$y=\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{x^2-1+2}{x^2-1}=1+\frac{2}{x^2-1}.$$

На основании формулы (7) заключаем, что прямая $y=1$ является асимптотой (рис. 44).

Пример 3. Построить график функции $f(x)=x^3+4x^2-6$.

1. Функция определена при всех x, т. е. областью ее определения является бесконечный промежуток $]-\infty;+\infty[$.

2. На концах промежутка получаем

$$\lim_{x\to -\infty}(x^3+4x^2-6)=-\infty;\quad \lim_{x\to +\infty}x^3+4x^2-6=+\infty.$$

3. С помощью производных $f'(x)=3x^2+8x$, $f''(x)=6x+8$ находим критические точки аргумента функции и исследуем их характер:

$$3x^2+8x=0;\ x(3x+8)=0;\ x_1=-\frac{8}{3};\ x_2=0;$$

$$f''\left(-\frac{8}{3}\right)=6\left(-\frac{8}{3}\right)+8=-16+8=-8<0;\ f''(0)=8>0.$$

Следовательно, $x=-\dfrac{8}{3}$ — точка максимума, $x=0$ — точка минимума.

4. Вычислим значения экстремумов:

$$\max f(x)=f\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{512}{27}+\frac{256}{9}-6=3\frac{13}{27};$$

$$\min f(x)=f(0)=-6.$$

5. Определим критические точки аргумента производной, решив уравнение $f''(x)=0$, т. е. $6x+8=0$, откуда $x=-\dfrac{4}{3}$. Если $x<-\dfrac{4}{3}$, то $f''(x)<0$; если $x>-\dfrac{4}{3}$, то $f''(x)>0$.

Таким образом, $x=-\dfrac{4}{3}$ — абсцисса точки перегиба $K\left(-\dfrac{4}{3};-\dfrac{34}{27}\right)$.

6. Найдем точки пересечения графика функции с координатными осями. Решая систему уравнений $y=x^3+4x^2-6$, $x=0$, получаем точку $N(0;-6)$ пересечения с осью Oy.

Система $y=x^3+4x^2-6$, $y=0$ приводится к кубическому уравнению $x^3+4x^2-6=0$. Решая это уравнение с помощью методов, рассматриваемых в § 31, находим три точки пересечения графика с осью Ox. Это точки, для которых соответственно $x_1=-3{,}51$, $x_2=-1{,}57$, $x_3=1{,}08$.

7. Данная линия асимптот не имеет (рис. 45), в чем можно убедиться с помощью формул (6).

Пример 4. Построить график функции $f(x)=-x^4+2x^3+x^2-2x$.

Областью определения функции является бесконечный промежуток $]-\infty; +\infty[$.

На концах промежутка получаем

$$\lim_{x\to-\infty}(-x^4+2x^3+x^2-2x)=-\infty;\quad \lim_{x\to+\infty}(-x^4+2x^3+x^2-2x)=-\infty.$$

С помощью производных $f'(x)=-4x^3+6x^2+2x-2$; $f''(x)=-12x^2+12x+2$ найдем критические точки и исследуем их.

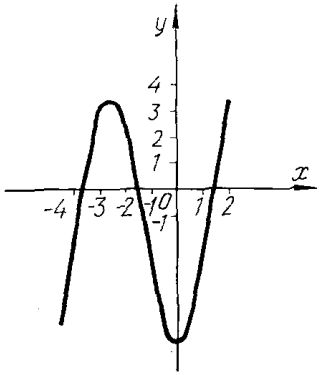


Рис. 45

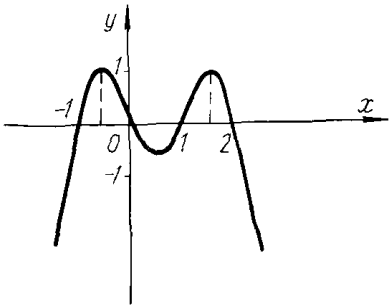


Рис. 46

Приравнивая нулю первую производную, получаем уравнение

$$-4x^3+6x^2+2x-2=0$$

или

$$2x^3-3x^2-x+1=0. \qquad (I)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x=0{,}5$ является корнем этого уравнения. Разложив на множители левую часть уравнения (I), представим его в виде

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2-x-1)=0.$$

Обратив в нуль второй сомножитель, заключенный в скобки, получим квадратное уравнение

$$x^2-x-1=0,$$

корни которого $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Исследуем критические точки с помощью второй производной. Так как

$$f''\left(\frac{1}{2}\right)=-12\left(\frac{1}{2}\right)^2+12\frac{1}{2}+2=-3+6+2=5>0,$$

то $x=0{,}5$ — точка минимума.

Поскольку

$$f''\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=-12\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2+12\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)+2=$$

$$=-3(1-2\sqrt{5}+5)+6(1-\sqrt{5})+2=-3(6-2\sqrt{5})+$$

$$+6(1-\sqrt{5})=-10<0$$

и

$$f''\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=-12\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+12\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+2<0,$$

то $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\approx 0{,}6$ и $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1{,}6$ — точки максимума.

Вычисляем значения экстремумов:

$$\min f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16}+\frac{2}{8}+\frac{1}{4}-1=-\frac{9}{16};$$

$$\max f(x)=f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=1.$$

Находим точки, в которых график функции пересекает ось Ox. Приравняв нулю данную функцию, получим уравнение

$$-x^4+2x^3+x^2-2x=0 \text{ или } x^4-2x^3-x^2+2x=0.$$

Разлагая левую часть на множители, получаем

$$(x^4-x^2)-(2x^3-2x)=x^2(x^2-1)-2x(x^2-1)=(x^2-1)(x^2-2x)=$$

$$=x(x^2-1)(x-2)=0,$$

откуда $x=0$, $x=-1$, $x=1$, $x=2$. Это абсциссы точек пересечения графика с осью Ox.

Рассматриваемая линия асимптот не имеет (рис. 46).

Пример 5. Построить график функции $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

Данная функция не определена лишь в одной точке $x=-1$; область ее определения состоит из двух интервалов $]-\infty;\ -1[$ и $]-1;\ +\infty[$.

Исследуем изменение функции при x, стремящемся к концам промежутков области определения:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+1}=-\infty;\quad \lim_{x\to-1-0}\frac{x^2}{x+1}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{x^2}{x+1}=+\infty;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}=+\infty.$$

Находим производные данной функции:

$$f'(x)=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2};\quad f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}.$$

Первая производная обращается в нуль при $x=-2$ и $x=0$. Поскольку

$$f''(-2)=\frac{2}{(-2+1)^3}=-2<0;\quad f''(0)=\frac{2}{(0+1)^3}=2>0,$$

то $x=-2$ — точка максимума, $x=0$ — точка минимума.

Вычисляем значения экстремумов:

$$\max f(x)=f(-2)=\frac{(-2)^2}{-2+1}=-4;$$

$$\min f(x)=f(0)=\frac{0}{0+1}=0.$$

Вторая производная не обращается в нуль ни в одной точке, график функции не имеет точек перегиба. Вторая производная не определена в точке $x=-1$, в которой не определена и сама функция. Так как $f''(x)<0$ при $x<-1$, $f''(x)>0$ при $x>-1$, то график функции является выпуклым вверх при $x<-1$ и выпуклым вниз при $x>-1$.

График функции имеет две асимптоты $x=-1$ и $y=x-1$, поскольку

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2}{x+1}=\infty;\quad y=\frac{x^2}{x+1}=\frac{(x^2-1)+1}{x+1}=x-1+$$

$$+\frac{1}{1+x}=x-1+\alpha(x),$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to\infty$.

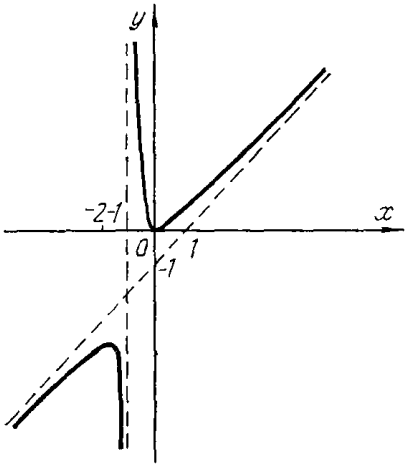


Рис. 47

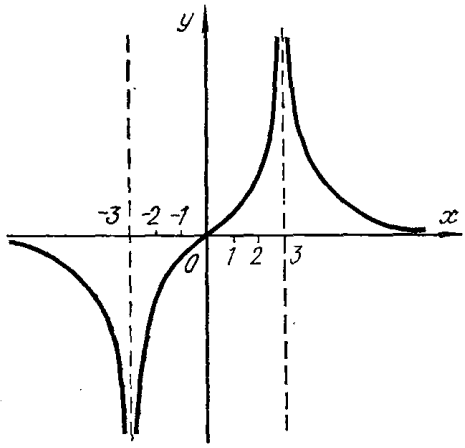


Рис. 48

Данная функция принимает отрицательные значения при $x<-1$ и положительные — при $x>-1$; она обращается в нуль при $x=0$; график ее расположен целиком книзу от оси Ox при $x<-1$ и кверху от оси Ox при $x>-1$, в точке O (0; 0) график касается оси Ox и пересекает ось Oy (рис. 47).

Пример 6. Исследовать функцию $f(x)=\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|$ и построить ее график.

Функция не определена только в двух точках $x=-3$ и $x=3$, область ее определения состоит из трех интервалов $]-\infty;\ -3[$, $]-3;\ 3[$, $]3;\ +\infty[$.

Исследуем изменение функции при x, стремящемся к концам промежутков области определения:

$$\lim_{x\to-\infty}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|=0;\quad \lim_{x\to-3-0}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|=-\infty;\quad \lim_{x\to-3+0}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|=-\infty;$$

$$\lim_{x\to3-0}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|=+\infty;\quad \lim_{x\to3+0}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|=+\infty;\quad \lim_{x\to+\infty}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|=0.$$

Так как при $x<-3$ и $x>3$

$$f'(x)=\frac{-6}{x^2-9}<0,$$

то функция убывает в промежутках $]-\infty; -3[$, $]3; +\infty[$; поскольку $f'(x)>0$ при $-3<x<3$, то функция возрастает в промежутке $]-3; 3[$.

Функция экстремумов не имеет, потому что нет критических точек: производная отлична от нуля при всех x из области определения; она обращается в бесконечность при $x=\pm 3$, в этих точках не определена и сама функция.

Вторая производная $f''(x)=\dfrac{12x}{(x^2-9)^2}$ равна нулю при $x=0$ и меняет знак при переходе через эту точку. Следовательно, $x=0$ — абсцисса точки перегиба, начало координат является точкой перегиба графика функции $\left(y=0 \text{ при } x=0,\ f(0)=\ln\left|\dfrac{0+3}{0-3}\right|=\ln 1=0\right)$.

Ось Ox является горизонтальной асимптотой графика, так как

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|=0.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to -3}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|=-\infty;\quad \lim_{x\to 3}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right|=+\infty,$$

то прямые $x=-3$, $x=3$ являются вертикальными асимптотами графика данной функции (рис. 48).

Найти асимптоты линий:

651. $y=\dfrac{6}{x+7}$.

652. $y=\dfrac{8}{x^2-25}$.

653. $y=\dfrac{x^2-4x+9}{x}$.

654. $y=\dfrac{x}{x^2-4x+3}$.

655. $y=\dfrac{x^4}{x^3+1}$.

656. $y=\ln\left|\dfrac{x-5}{x+5}\right|$.

Исследовать функции и построить их графики:

657. 1) $y=x^3+3x^2$; 2) $y=x^3-12x$; 3) $y=x^3-2x^2+1$; 4) $y=x^3-3x^2-x+3$.

658. 1) $y=x^3-3x^2$; 2) $y=x^3-6x^2+9x+3$; 3) $y=x^3+6x^2+9x+1$; 4) $y=x^3+3x^2+3x+4$.

659. 1) $y=(x^2-1)(x^2-4)$; 2) $y=8x^2-x^4-7$.

660. 1) $y=x^4-4x^2+5$; 2) $y=(x^2-1)(x^2-9)$.

661. 1) $y=\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right|$; 2) $y=\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$, $a>0$.

662. 1) $y=x^4-2x^2$; 2) $y^2=x^2+y^4$.

663. $y=\dfrac{x}{4}+\dfrac{4}{x}$.

664. $y=\dfrac{1}{1+x^2}$.

§ 31. Приближенное решение уравнений

Корнем уравнения

$$f(x) = 0 \tag{8}$$

называется такое значение $x=x_0$ аргумента функции $f(x)$, при котором это уравнение обращается в тождество, т. е. $f(x_0)\equiv 0$. Корень уравнения (8) геометрически представляет абсциссу общей точки графика функции $y=f(x)$ и оси Ox (рис. 49, *а*—*в*).

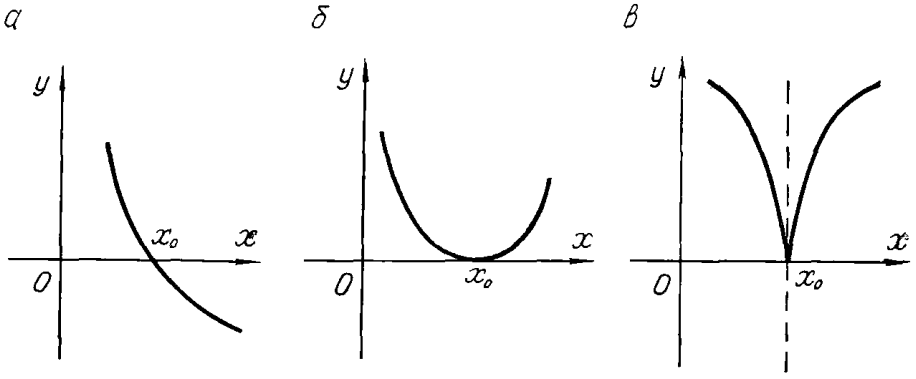


Рис. 49

Отделить корень уравнения (8) — это значит найти такой промежуток, внутри которого имеется корень данного уравнения, причем этот корень является единственным в данном промежутке.

Отделение корней уравнения (8) можно выполнить *графически*, если удается построить график функции $y=f(x)$, по которому можно судить о том, в каких промежутках находятся точки пересечения его с осью Ox.

Часто бывает затруднительным построить график функции $y=f(x)$; тогда следует представить уравнение (8) в эквивалентном виде

$$f_1(x) = f_2(x) \tag{9}$$

с таким расчетом, чтобы графики функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ строились по возможности проще. Корень уравнения (9) геометрически представляет абсциссу точки пересечения графиков функций $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$.

Таким способом легко, например, найти корни уравнения

$$x^3 + px + q = 0.$$

Это будут абсциссы точек пересечения прямой $y=-px-q$ и линии $y=x^3$.

Аналогично находятся корни уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0;$$

в этом случае они представляют собой абсциссы точек пересечения параболы $y=-ax^2-bx-c$ и линии $y=x^3$.

Для отделения корней уравнения (8) применяют следующий критерий: если на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ непрерывна и монотонна, а ее значения на концах отрезка имеют разные знаки, то на рассматриваемом отрезке имеется один и только один корень уравнения. Достаточным признаком монотонности функции $f(x)$ на данном отрезке является сохранение знака первой ее производной (если $f'(x)>0$, функция возрастает на данном отрезке (рис. 50, *а*); если $f'(x)<0$, функция убывает (см. рис. 50, *б*)).

Существуют различные численные методы решения алгебраических и транс-

цендентных уравнений. Рассмотрим некоторые из методов отыскания действительных корней уравнения, в основе которых лежит идея последовательного уточнения начального приближения к корню.

Изложим так называемый *метод хорд*. Пусть на отрезке $[a; b]$ находится единственный корень ξ уравнения (8), левая часть которого $f(x)$ — непрерывная функция. Через точки $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ проведем прямую, уравнение которой принимает вид

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a} \text{ или } x-a=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a).$$

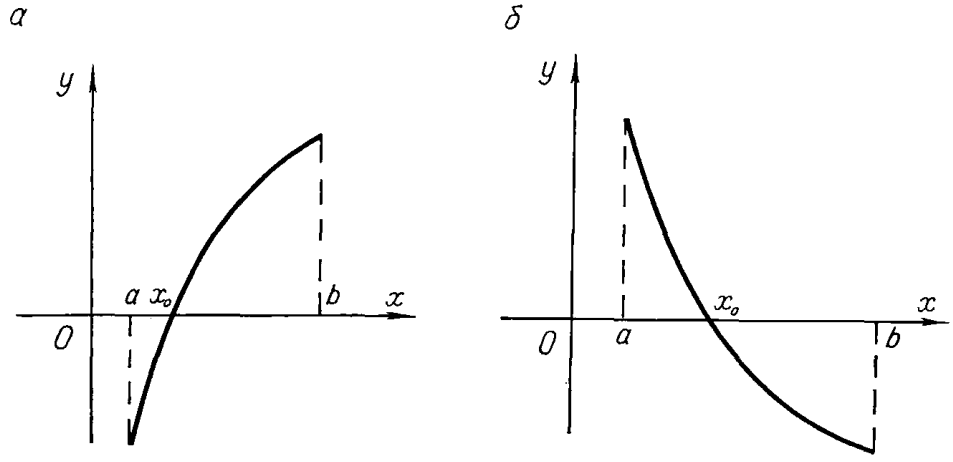


Рис. 50

Найдем абсциссу точки пересечения этой прямой с осью Ox, для чего в последнем уравнении положим $y=0$:

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a). \tag{10}$$

Формула (10) определяет приближенное значение корня ξ уравнения (8), его называют *первым приближением*. Чтобы получить *второе приближение* x_2, формулу (10) необходимо применить к тому из отрезков $[a; x_1]$, $[x_1; b]$, на концах которого функция имеет противоположные знаки.

Аналогично вычисляются и следующие приближения. Если известно $(n-1)$-е приближение, то n-е вычисляется по формуле

$$x_n=\frac{bf(x_{n-1})-x_{n-1}f(b)}{f(x_{n-1})-f(b)} \quad (n=1, 2, \ldots)$$

в случае (рис. 51, *а*, *б*), когда

$$f(b)f''(x)>0,$$

или по формуле

$$x_n=\frac{af(x_{n-1})-x_{n-1}f(a)}{f(x_{n-1})-f(a)} \tag{11}$$

в случае (рис. 51, *в*, *г*), когда

$$f(a)f''(x)>0. \tag{12}$$

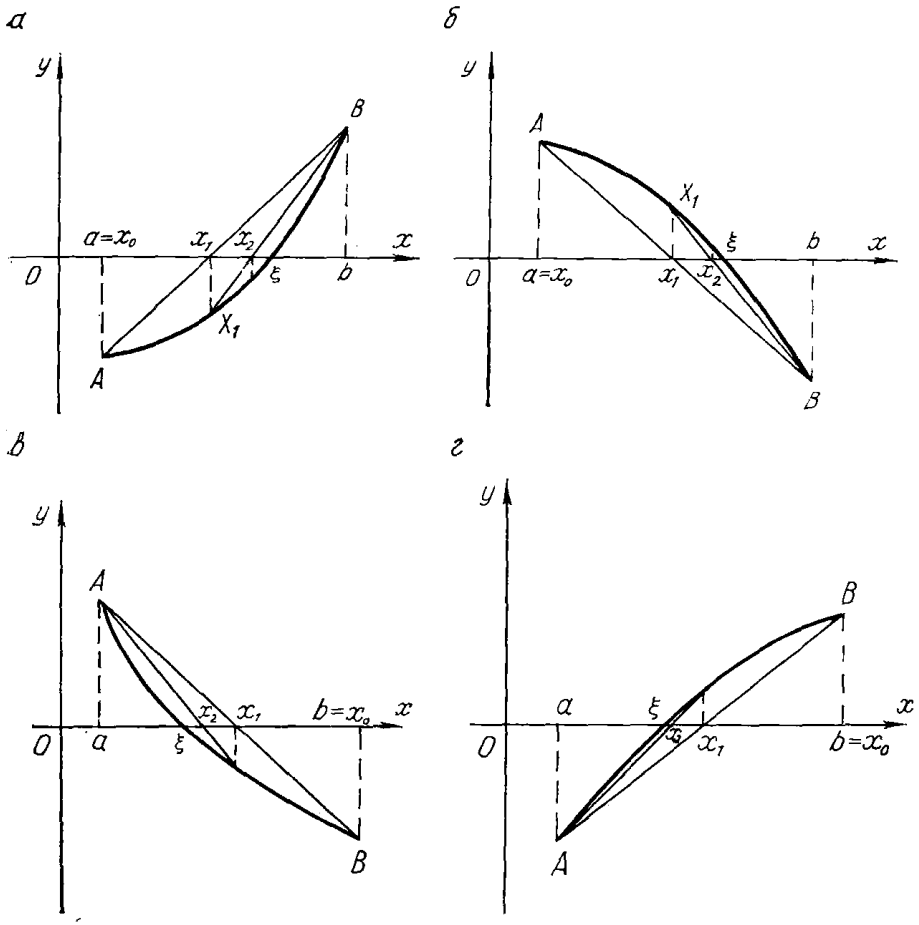


Рис. 51

В первом случае за начальное приближение принимается a, т. е. $x_0=a$, во втором — b, т. е. $x_0=b$.

Последовательность чисел x_n $(n=1, 2, \ldots)$ сходится к корню ξ, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

Вычисления приближений x_1, x_2, x_3, ... следует производить до тех пор, пока два положительных приближения x_k, x_{k+1} не совпадут на заданное число знаков.

Для промежуточных выкладок следует брать один-два запасных знака.

Если функция $f(x)$ имеет отличную от нуля производную $f'(x)$ на отрезке $[a; b]$, то оценка абсолютной погрешности определяется формулой

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{\mu}, \qquad (13)$$

где

$$\mu = \min_{a\leqslant x\leqslant b} |f'(x)|.$$

Метод касательных (или *метод Ньютона*) состоит в следующем. Пусть на отрезке $[a; b]$ находится единственный корень ξ уравнения (8). Проведем

касательную к кривой $y=f(x)$ в точке $A\,[a;\ f(a)]$ до пересечения с осью Ox (рис. 52, *а*). Уравнение этой касательной имеет вид

$$y - f(a) = f'(a)\,(x - a).$$

Полагая в этом уравнении $y=0$, находим абсциссу x_1 точки пересечения касательной с осью Ox:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

в предположении, что $f'(a) \neq 0$.

Абсциссу x_1 точки пересечения касательной и оси Ox можно взять в качестве первого приближения корня. Проведя касательную через соответст-

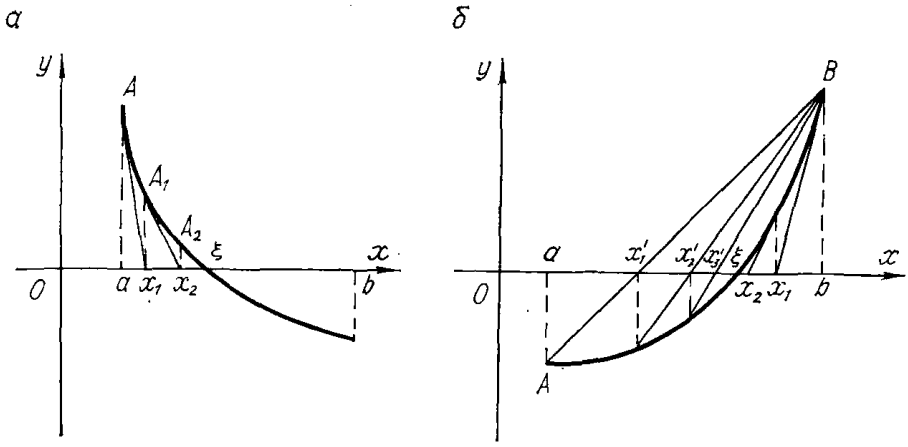


Рис. 52

вующую точку $A_1\,[x_1;\ f(x_1)]$ и найдя точку ее пересечения с осью Ox, получим x_2 — второе приближение корня. Аналогично определяются последующие приближения. В методе касательных n-е приближение вычисляется по формуле

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

причем за начальное приближение x_0 принимается такое значение x_0 из отрезка $[a;\ b]$, для которого выполняется условие

$$f(x_0)\,f''(x_0) > 0, \tag{14}$$

называемое *условием Фурье*.

Оценка погрешности определяется формулой (13).

Комбинированный метод состоит в одновременном использовании метода хорд и метода касательных. Его удобно применять, если на исходном отрезке $[a;\ b]$ вторая производная $f''(x)$ сохраняет знак. В этом случае можно гарантировать приближение к корню с двух сторон: касательная пересекает ось Ox со стороны выпуклости, а хорда — со стороны вогнутости графика функции $y=f(x)$. Приближения по методу касательных будут располагаться с одной стороны корня, а приближения по методу хорд — с другой (рис. 52, *б*). Таким образом, получаются все более суживающиеся отрезки, внутри которых заключен корень. Длина последнего из отрезков дает величину абсолютной погрешности приближенного значения корня.

Если каким-либо способом получено приближенное значение x_0 корня уравнения (8), то уточнение корня можно осуществить *методом последова-*

тельных приближений, или *методом итераций.* Для этого уравнение (8) представляют в виде

$$x = \varphi(x), \tag{15}$$

что всегда можно сделать и притом многими способами, например

$$x = x + cf(x), \tag{16}$$

где c — произвольная постоянная.

Пусть число x_1 есть результат подстановки x_0 в правую часть уравнения (15): $x_1 = \varphi(x_0)$, далее, $x_2 = \varphi(x_1)$ и

$$x_n = \varphi(x_{n-1}). \tag{17}$$

Этот процесс последовательного вычисления чисел x_n ($n=1, 2, \ldots$) по формуле (17) называется методом последовательных приближений или методом итераций.

Процесс итераций сходится ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$), если выполнено условие

$$|\varphi'(x)| \leqslant q < 1 \tag{18}$$

на отрезке $[a; b]$, содержащем корень ξ.

Пример 1. Отделить корни уравнения $x^3+6x-5=0$.

Функция $f(x)=x^3+6x-5$ определена на всей действительной оси. Производная $f'(x)=3x^2+6$ принимает положительные значения при всех x, функция возрастает в промежутке $]-\infty; +\infty[$. При отрицательных x, достаточно больших по абсолютной величине, функция принимает отрицательные значения; при достаточно больших положительных x функция положительна (символически это записывается так: $f(-\infty)<0$, $f(+\infty)>0$). Поскольку функция монотонна и на концах промежутка принимает значения различных знаков, то данное уравнение имеет единственный действительный корень в промежутке $]-\infty; +\infty[$.

Корень считается отделенным, если указан конечный промежуток, в котором он находится. Чтобы найти этот промежуток, можно применить *метод проб*, т. е. рассмотреть значения функции при некоторых произвольно фиксированных значениях аргумента. Если при двух значениях аргумента a и b функция принимает разные знаки, т. е. $f(a)f(b)<0$, то $]a; b[$ — интервал, в котором находится корень. Фиксируем значения $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$, при которых проще вычисляются значения функции. Так как $f(-1)=-1-6-5<0$, $f(0)=-5<0$, то в интервале $]-1; 0[$ корня нет. Поскольку $f(0)<0$, а $f(1)=1+6-5>0$, то корень содержится в интервале $]0; 1[$.

Замечания: 1. Можно указать отрезок меньшей длины, на котором находится корень. Для этого вводят в рассмотрение середину отрезка $[a; b]$, т. е. точку $c=\dfrac{a+b}{2}$; в данном случае $c=\dfrac{1}{2}$. Так как $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{6}{2}-5<0$, а $f(1)>0$, то корень лежит в интервале $\left]\dfrac{1}{2}; 1\right[$. Этот процесс можно продолжить. Например, $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{27}{64}+\dfrac{18}{4}-5=-\dfrac{5}{64}<0$, а $f(1)>0$, корень принадлежит интервалу $]0{,}75; 1[$.

2. Корень данного уравнения можно отделить и графически. Придадим уравнению вид $x^3=-6x+5$, т. е. вид (9), и рассмотрим графики функций $y=x^3$, $y=-6x+5$ (рис. 53). Из чертежа видно, что указанные графики пересекаются в точке M, абсцисса которой находится в интервале $]0; 1[$.

Пример 2. Графически отделить корни уравнения $e^{-x}-x+1=0$.

Данное уравнение представим в виде $e^{-x}=x-1$ и рассмотрим графики двух функций $y=e^{-x}$, $y=x-1$ (рис. 54). Из чертежа видно, что графики этих функций пересекаются в одной точке M, абсцисса которой принадлежит

интервалу]1; 2[. Следовательно, единственный корень уравнения находится в интервале]1; 2[.

Пример 3. Методом хорд найти корень уравнения $x^3-2x+7=0$.

Поскольку

$$f(-3)=-27+6+7<0; \quad f(-2)=-8+6+7>0,$$

то корень уравнения находится на отрезке [—3; —2]. Рассмотрев середину этого отрезка, т. е. точку $x=-2{,}5$, получим $f(-2{,}5)=(-2{,}5)^3-2(-2{,}5)+7=-3{,}625<0$. Это означает, что корень принадлежит отрезку [—2,5; —2].

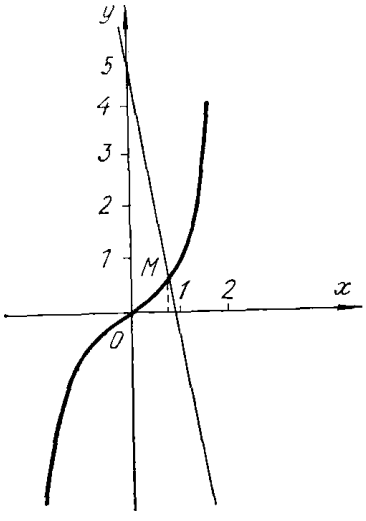


Рис. 53

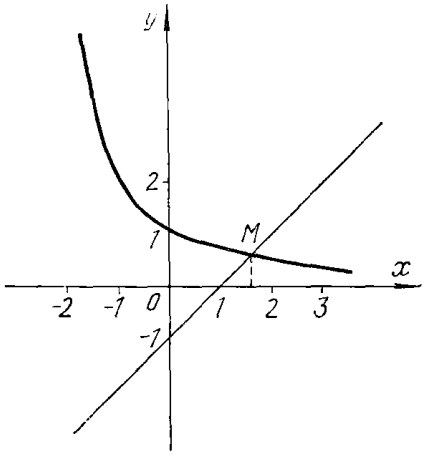


Рис. 54

Продолжая аналогичные рассуждения, находим отрезок [—2,3; —2,2], на котором лежит корень уравнения. На этом отрезке производные $f'(x)=3x^2-2$ и $f''(x)=6x$ сохраняют знак.

Так как $f(-2{,}3)\ f''(-2{,}3)>0$ т. е. выполнено условие (12), пользуемся формулой (11), положив $x_0=-2{,}2$.

Приняв во внимание, что $f(x_0)=f(-2{,}2)=0{,}752$, $a=-2{,}3$, $f(a)=f(-2{,}3)=-0{,}567$, по этой формуле получим результаты, приведенные в табл. 1. Из таблицы видно, что $\xi=-2{,}258$ — корень уравнения.

Таблица 1

n	x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$af(x_{n-1})$	$x_{n-1}f(a)$	$af(x_{n-1})-x_{n-1}f(a)$	$f(x_{n-1})-f(a)$	x_n
1	—2,2	0,752	—1,7296	1,2474	—2,9770	1,319	—2,25701
2	—2,25701	0,016558	—0,038083	1,279725	—1,317809	0,583558	—2,258231
3	—2,258231	0,000371	—0,000853	1,280417	—1,281270	0,567371	—2,258259

Пример 4. Методом Ньютона найти действительные корни уравнения $x^3+x-3=0$.

Придавая данному уравнению вид (9), получаем $x^3=-x+3$.

Построив графики функций $f_1(x)=x^3$, $f_2(x)=-x+3$ (рис. 55), найдем, что единственный действительный корень уравнения принадлежит интервалу]1; 2[. Укажем промежуток меньшей длины, на котором лежит корень.

Так как

$$f(1{,}2) = (1{,}2)^3 + 1{,}2 - 3 = -0{,}072 < 0;$$

$$f(1{,}3) = (1{,}3)^3 + 1{,}3 - 3 = 0{,}497 > 0,$$

то корень находится в интервале $]1{,}2;\ 1{,}3[$. Рассмотрим еще середину отрезка $[1{,}2;\ 1{,}3]$, т. е. точку $x = 1{,}25$. Поскольку

$$f(1{,}25) = (1{,}25)^3 + 1{,}25 - 3 = 0{,}203125 > 0 \quad \text{и} \quad f(1{,}2) < 0,$$

то искомый корень лежит на отрезке $[1{,}2;\ 1{,}25]$.

Данная функция $f(x) = x^3 + x - 3$ имеет производные $f'(x) = 3x^2 + 1$; $f''(x) = 6x$, которые непрерывны на отрезке $[1{,}2;\ 1{,}25]$ и положительны на нем.

В качестве начального приближения возьмем $x_0 = 1{,}25$, так как для него выполнено условие Фурье, т. е. условие (14):

$$f(x_0)\, f''(x_0) = f(1{,}25)\, f''(1{,}25) \approx 0{,}203125 \cdot 6 \cdot 1{,}25 > 0.$$

Результаты вычислений занесем в табл. 2.

Таблица 2

n	x_n	x_n^2	x_n^3	$x_n^3 + x_n$	$f(x_n) = x_n^3 + x_n - 3$	$f'(x_n) = 3x_n^2 + 1$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1,25	1,5625	1,953125	3,203125	0,203125	5,6875	0,035714	1,214286
1	1,214286	1,47449	1,790452	3,004738	0,004738	5,42347	0,000874	1,213412
2	1,213412	1,472369	1,786590	3,000002	0,000002	5,417107	0,0000004	1,2134116

Следовательно, $\xi = 1{,}21341$ — корень данного уравнения.

Пример 5. Комбинированным методом найти корень уравнения $x^3 - 2x + 7 = 0$.

В примере 3 было показано, что корень уравнения принадлежит отрезку $[-2{,}3;\ -2{,}2]$.

Методом Ньютона по формуле $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ и методом секущих по формуле

$$x_{n+1}' = x_n' - \frac{f(x_n')}{f(a) - f(x_n')}(a - x_n') = \frac{x_n' f(a) - a f(x_n')}{f(a) - f(x_n')}$$

ищем последовательные приближения к корню, взяв $x_0 = -2{,}3$ и $x_0' = -2{,}2$.

При $n = 0$ находим

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -2{,}3 - 0{,}040879 = -2{,}259121;$$

$$x_1' = \frac{x_0' = f(a) - a f(x_0')}{f(a) - f(x_0')} = \frac{(-2{,}2)\, f(-2{,}3) - (-2{,}3)\, f(-2{,}2)}{f(-2{,}3) - f(-2{,}2)} =$$

$$= -2{,}257013.$$

При $n = 1$ получаем по методу касательных

$$x_2 = -2{,}258259 \quad \left(\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0{,}000862\right)$$

и по методу секущих

$$x_2' = -2{,}258231 \quad (x_1' = -2{,}257013, \quad a = -2{,}3).$$

При $n = 2$ находим

$$x_3 = -2{,}2582589 \quad \text{и} \quad x_3' = -2{,}258259.$$

Следовательно, $\xi = -2{,}258259$ — корень уравнения.

Пример 6. Методом итераций найти действительный корень уравнения $x^3 + x - 3 = 0$.

В примере 4 было показано, что корень этого уравнения принадлежит отрезку $[1{,}2;\ 1{,}3]$.

Данное уравнение можно записать так: $x = \varphi(x)$, где $\varphi(x) = 3 - x^3$, однако этим представлением пользоваться нельзя, так как

$$\max_{x \in [1{,}2;\ 1{,}3]} |\varphi'(x)| = \max |-3x^2| = 5{,}07 > 1,$$

т. е. не выполнено условие (18).

В соответствии с формулой (16) получаем

$$\varphi(x) = x + cf(x) = x + c(x^3 + x - 3).$$

Условие (18) будет выполнено, например, при $c = -0{,}2$;

$$\varphi(x) = x - 0{,}2(x^3 + x - 3),$$

$$\varphi'(x) = 1 - 0{,}2(3x^2 + 1);$$

$$\max_{x \in [1{,}2;\ 1{,}3]} |\varphi'(x)| = \max |1 - 0{,}2(3x^2 + 1)| = 0{,}214 < 1.$$

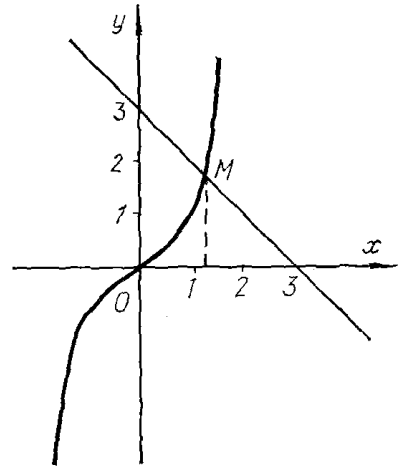


Рис. 55

Взяв в качестве x_0 любое значение x из отрезка $[1{,}2;\ 1{,}3]$, например, $x_0 = 1{,}21$, проведем вычисления по формуле $x_{n+1} = \varphi(x)_n$, где $\varphi(x_n) = x_n - 0{,}2(x_n^3 + x_n - 3)$, $\varphi(x_n) = x_n - 0{,}2f(x_n)$, и представим их в табл. 3, из которой видно, что $\xi = 1{,}21341$ — корень уравнения.

Таблица 3

n	x_n	x_n^3	$f(x_n)$	$\varphi(x_n)$
0	1,21	1,771561	−0,018439	1,213688
1	1,213688	1,787810	+0,001498	1,213388
2	1,213388	1,786483	−0,000129	1,213414
3	1,213414	1,786599	+0,000013	1,213411

Пример 7. Методом итераций найти действительный корень уравнения $x^7 + x + 4 = 0$.

Представив данное уравнение в виде $x^7 = -x - 4$ и построив графики функций $f_1(x) = x^7$, $f_2(x) = -x - 4$, найдем, что искомый корень принадлежит отрезку $[-2;\ -1]$. Можно указать отрезок меньшей длины, на котором лежит корень. Так как $f(-1,\ 2) < 0$ и $f(-1,\ 1) > 0$, то корень находится на отрезке $[-1{,}2;\ -1{,}1]$.

Из данного уравнения находим

$$x = \sqrt[7]{-x-4}; \quad \varphi(x) = -\sqrt[7]{-x-4}; \quad \varphi'(x) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[7]{(-x-4)^6}}.$$

Для функции $\varphi(x)$ условие (18) выполнено:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{\sqrt[7]{(-x-4)^6}} \leqslant q = 0{,}06 < 1.$$

В качестве начального приближения возьмем $x_0 = -1{,}15$. Результаты вычислений сводим в табл. 4, из которой видно, что $\xi = -1{,}1607$ — корень уравнения.

Таблица 4

n	x_n	$-x_n-4$	$-\sqrt[7]{-x_n-4}=\varphi(x_n)$	$x_{n+1}=\varphi(x_n)$
0	−1,15	−2,85	−1,1614	−1,1614
1	−1,1614	−2,8386	−1,1607	−1,1607
2	−1,1607	−2,8393	−1,1607	−1,1607

Замечание. Уравнение можно переписать в виде $x = \varphi_1(x)$, где $\varphi_1(x) = -4 - x^7$. Поскольку для функции $\varphi_1(x)$ условие (18) не выполнено, то этим представлением пользоваться нельзя.

Графически отделить корни уравнений:

665. $e^x + x = 0$. **666.** $e^x - 2x = 0$. **667.** $2e^{-x} - x = 0$.

668. $e^{-x} + 3x = 0$. **669.** $\cos x - x = 0$. **670.** $\cos x + 2x = 0$.

671. $\ln x + x = 0$. **672.** $10 \ln x - x = 0$. **673.** $2 \lg x + x = 0$.

674. $5 \lg x - x = 0$. **675.** $\ln|x| - x = 0$. **676.** $3 \ln|x| + x = 0$.

677. $\lg|x| + 2x = 0$. **678.** $\lg|x| - 3x = 0$. **679.** $x \ln x - 1 = 0$.

680. $x \lg x - 2 = 0$. **681.** $x \ln|x| + 1 = 0$. **682.** $x \lg|x| + 3 = 0$.

683. $x^3 + x - 2 = 0$. **684.** $x^2 - 2x + 4 = 0$.

Отделить корни уравнений:

685. $x^3 + x - 3 = 0$. **686.** $x^3 + 10x - 9 = 0$.

687. $x^3 - 12x - 8 = 0$. **688.** $x^3 + 4x^2 - 6 = 0$.

689. $x^4 + 5x - 3 = 0$. **690.** $x^5 + 4x - 2 = 0$.

691. $x^6 + x - 1 = 0$. **692.** $x^7 + 6x - 5 = 0$.

693. $e^x - x - 2 = 0$. **694.** $e^{-x} + x - 3 = 0$.

695. $\ln x - \sqrt{4 - 2x} = 0$. **696.** $\ln x - x + 2 = 0$.

Методом хорд найти действительные корни уравнений:

697. $x^3 + x + 1 = 0$. **698.** $x^3 - x - 1 = 0$.

699. $x^3 - x + 1 = 0$. **700.** $x^3 + x - 1 = 0$.

701. $x^4 + 2x - 1 = 0$. **702.** $x^4 + 3x - 2 = 0$.

703. $x^4 + 4x - 2 = 0$. **704.** $x^4 + 2x - 2 = 0$.

705. $x^5 + x + 1 = 0$. **706.** $x^5 - x + 1 = 0$.

707. $x^5 + x - 1 = 0$. **708.** $x^5 - x - 1 = 0$.

Методом касательных найти действительные корни уравнений:

709. $x^3 + 2x - 1 = 0$. **710.** $x^3 + 3x - 2 = 0$.

711. $x^3 - 5x + 1 = 0$. **712.** $x^3 - x^2 + 5 = 0$.

713. $x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0$. **714.** $x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$.

715. $x^4 + x - 3 = 0$. **716.** $x^4 + 3x + 1 = 0$.

717. $x^5 - 3x + 1 = 0$. **718.** $x^5 + 2x + 1 = 0$.

719. $e^{-x} - 3x + 4 = 0$. **720.** $(x - 1)^2 - \sin 2x = 0$.

721. $2\lg x - (x - 2)^2 = 0$. **722.** $\operatorname{sh} x - 10 \operatorname{th} x + 2 = 0$.

723. $\operatorname{ch} x + 2x - 3 = 0$. **724.** $\operatorname{sh} x - x^2 - 2 = 0$.

Комбинированным методом найти корни уравнений:

725. $x^3 - 4x - 5 = 0$. **726.** $x^3 - 2x + 3 = 0$.

727. $x^3 + x^2 + x - 2 = 0$. **728.** $x^3 - 2x^2 - x + 1 = 0$.

729. $x^4 - 2x - 1 = 0$. **730.** $x^4 - 4x + 2 = 0$.

731. $\ln x - (x - 4)^2 = 0$. **732.** $e^x - 3(x + 1)^2 = 0$.

733. $\cos x - 2x + 0{,}5 = 0$. **734.** $e^{-x} + x^2 - 2 = 0$.

Методом итераций найти корни уравнений:

735. $x^3 - 2x + 7 = 0$. **736.** $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$.

737. $x^4 + 3x - 1 = 0$. **738.** $x^4 + 3x + 1 = 0$.

739. $x^5 - 2x - 3 = 0$. **740.** $x^5 + 3x - 2 = 0$.

741. $x^6 - x - 1 = 0$. **742.** $x^6 + x - 1 = 0$.

743. $x^7 + x + 1 = 0$. **744.** $x^7 - 3x + 1 = 0$.

Глава VII. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция $F(x)$, определенная в интервале $]a;\ b[$, называется *первообразной* данной функции $f(x)$ в этом интервале, если для любого $x \in]a;\ b[$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Неопределенным интегралом от непрерывной функции $f(x)$ или от дифференциального выражения $f(x)dx$ называется общее выражение для всех первообразных функций $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где $F'(x)=f(x)$. Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*, C — *постоянной интегрирования*.

Свойства неопределенного интеграла. 1. Производная, неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x); \qquad d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx \qquad (c = \text{const}).$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен такой же алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых:

$$\int [f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx - \int f_2(x)\,dx + \int f_3(x)\,dx.$$

Таблица простейших неопределенных интегралов

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1). \tag{1}$$

$$\int 1 \cdot dx = \int dx = x + C. \tag{2}$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \tag{3}$$

$$\int e^x dx = e^x + C. \tag{4}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \tag{5}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C. \tag{6}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C. \tag{7}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C. \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C. \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C. \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C. \tag{11}$$

$$\int \frac{1}{-1+x^2}\, dx = \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \tag{12}$$

Отметим, что все указанные формулы справедливы в тех промежутках, в которых определены соответствующие функции. Например, формула (3) справедлива для любого промежутка, не содержащего точки $x=0$; формула (10) — для интервала $]-1; 1[$ и т. п.

§ 32. Интегрирование методом разложения

Метод разложения основан на свойстве 4 неопределенного интеграла. Если

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) + f_3(x),$$

то

$$\int f(x)\, dx = \int f_1(x)\, dx - \int f_2(x)\, dx + \int f_3(x)\, dx.$$

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int (x^3 - 6x^2 + 4x - 5)\, dx$.

Пользуясь свойствами неопределенного интеграла и формулами (1) и (2), находим

$$\int (x^3 - 6x^2 + 4x - 5)\, dx = \int x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 4x dx -$$

$$- \int 5 dx = \int x^3 dx - 6\int x^2 dx + 4\int x dx - 5\int dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - 6 \cdot \frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 5x + C = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 2x^2 - 5x + C.$$

Замечание. Постоянная интегрирования записана не при нахождении каждого интеграла алгебраической суммы, а лишь один раз, так как сумма произвольных постоянных величин есть величина постоянная.

Пример 2. Найти интеграл $\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 dx$.

Преобразуя подынтегральную функцию и пользуясь формулой (1) в случае $m < 0$ и формулой (3), получаем

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3 dx = \int \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) dx =$$

$$= \int dx + 3\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x^3} = \int dx + 3\int \frac{dx}{x} +$$

$$+3\int x^{-2}dx+\int x^{-3}dx=x+3\ln|x|+3\frac{x^{-1}}{-1}+$$

$$+\frac{x^{-2}}{-2}+C=x+3\ln|x|-\frac{3}{x}-\frac{1}{2x^2}+C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}$

На основании формулы (1) находим

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int x^{-1/2}\,dx=\frac{x^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C=\frac{x^{1/2}}{1/2}+C=2\sqrt{x}+C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

Преобразуя подынтегральную функцию и пользуясь формулами (2), (8), находим

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-$$

$$-\int dx=\operatorname{tg}x-x+C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx$.

Преобразуя подынтегральную функцию и пользуясь формулами (8) и (9), получаем

$$\int\frac{\cos 2xdx}{\cos^2 x\sin^2 x}=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-$$

$$-\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx$.

Поскольку

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos x),$$

то

$$\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx=\int\frac{1}{2}(1+\cos x)\,dx=\frac{1}{2}\int dx+$$

$$+\frac{1}{2}\int\cos xdx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int\frac{x^2}{x^2+1}\,dx$.

Преобразуя подынтегральную функцию, с помощью формул (2) и (11) находим

$$\int\frac{x^2}{x^2+1}\,dx=\int\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\,dx=\int dx-\int\frac{dx}{x^2+1}=x-\operatorname{arctg}x+C.$$

Найти неопределенные интегралы:

745. 1) $\int x^3 dx$; 2) $\int (x^3 - 3x^2 + 4x + 7)\,dx$;

3) $\int \dfrac{x^5 + 4x^2 - 3x + 5}{x}\,dx$.

746. 1) $\int 3x^4 dx$; 2) $\int (x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 6x - 9)\,dx$;

3) $\int \dfrac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 6x - 8}{x^2}\,dx$.

747. $\int \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$.

748. $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$.

749. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$.

750. $\int \sin^2 \dfrac{x}{2}\,dx$.

751. $\int \dfrac{4\cos 2x dx}{\sin^2 2x}$.

752. $\int \left(\sin \dfrac{x}{2} + \cos \dfrac{x}{2}\right)^2 dx$.

753. $\int \dfrac{5\operatorname{tg}^2 x - 2}{\sin^2 x}\,dx$.

754. $\int \dfrac{8 - 7\cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx$.

755. $\int (a + bx^2)^2\,dx$.

756. $\int (ax - b)^3\,dx$.

757. $\int \sqrt{2px}\,dx$ $(p > 0)$.

758. $\int \dfrac{(1 - x^n)^2}{\sqrt{x}}\,dx$.

759. $\int a^x \left(1 - \dfrac{a^{-x}}{\sqrt{x}}\right) dx$.

760. $\int e^x \left(1 + \dfrac{e^{-x}}{x^3}\right) dx$.

761. $\int \left(\dfrac{2}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{3}{1 + x^2}\right) dx$.

762. $\int \dfrac{x^2}{x^2 - 1}\,dx$.

763. $\int \left(\dfrac{5}{1 + x^2} - \dfrac{9}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dx$.

764. $\int \dfrac{x^4}{x^2 + 1}\,dx$.

§ 33. Независимость вида неопределенного интеграла от выбора аргумента функции

Если

$$F(x) = \int f(x)\,dx; \quad F'(x) = f(x), \tag{13}$$

то

$$F(u) = \int f(u)\,du, \tag{14}$$

где $u = \varphi(x)$ — любая дифференцируемая функция от x.

Формула (14) получается из формулы (13) путем формальной замены x на u. Она дает возможность значительно расширить таблицу простейших интегралов. На ее основании получаем:

$$\int u^{\alpha}\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1). \tag{1'}$$

$$\int du = u + C. \tag{2'}$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C. \tag{3'}$$

$$\int e^{u}du = e^{u} + C. \tag{4'}$$

$$\int a^{u}\,du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C. \tag{5'}$$

$$\int \cos u du = \sin u + C. \tag{6'}$$

$$\int \sin u du = -\cos u + C. \tag{7'}$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C. \tag{8'}$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C. \tag{9'}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = -\arccos u + C. \tag{10'}$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C = -\operatorname{arctg} u + C. \tag{11'}$$

$$\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C. \tag{12'}$$

При пользовании формулами (1') — (12') необходимо иметь в виду простейшие преобразования дифференциала:

1. $dx = d(x+b)$ $(b = \text{const})$.

2. $dx = \frac{1}{a}\,d(ax)$ (постоянная $a \neq 0$).

3. $dx = \frac{1}{a}\,d(ax+b)$ $(a \neq 0)$.

4. $xdx = \frac{1}{2}\,d(x^2)$.

5. $xdx = \frac{1}{2}\,d(x^2+b)$ $(b = \text{const})$.

6. $\sin x dx = -d(\cos x)$.

7. $\cos x dx = d(\sin x)$.

В общем случае $\varphi'(x)\,dx = d\varphi(x)$.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int (4x+5)^2\,dx$.

Применяя одно из простейших свойств дифференциала (свойство 3), получаем

$$dx = \frac{1}{4}\,d(4x+5).$$

На основании формулы (1′) для случая, когда $u = 4x+5$, $\alpha = 2$, находим

$$\int (4x+5)^2\,dx = \int (4x+5)^2\,\frac{1}{4}\,d(4x+5) = \frac{1}{4}\int (4x+5)^2\,d(4x+5) =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{(4x+5)^3}{3} + C = \frac{1}{12}(4x+5)^3 + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$

Заметим, что $dx = d(x+2)$. Применив формулу (1′) для случая, когда $u = x+2$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}} = \int (x+2)^{-1/2}\,d(x+2) = \frac{(x+2)^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x+2} + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{2x+7}{x^2+7x-5}\,dx$.

Так как

$$d(x^2+7x-5) = (x^2+7x-5)'\,dx = (2x+7)\,dx,$$

то

$$\int \frac{(2x+7)\,dx}{x^2+7x-5} = \int \frac{d(x^2+7x-5)}{x^2+7x-5} = \ln|x^2+7x-5| + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{x\,dx}{x^2+4}$.

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+4} = \int \frac{\frac{1}{2}\,d(x^2+4)}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int e^{-\frac{x}{3}}\,dx$.

$$\int e^{-\frac{x}{3}}\,dx = -\int e^{-\frac{x}{3}}\,3d\left(-\frac{x}{3}\right) = -3\int e^{-\frac{x}{3}}\,d\left(-\frac{x}{3}\right) =$$

$$= -3e^{-\frac{x}{3}} + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \cos\frac{x}{7}\,dx$.

$$\int \cos\frac{x}{7}\,dx = \int \cos\frac{x}{7}\,7d\left(\frac{x}{7}\right) = 7\int \cos\frac{x}{7}\,d\left(\frac{x}{7}\right) = 7\sin\frac{x}{7} + C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \operatorname{ctg} x dx$.

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

Пример 8. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}$

$$\int \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{2d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}} = 2\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$$

Пример 9. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-16x^2}} = \int \frac{\frac{1}{4}\,d(4x)}{\sqrt{1-(4x)^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x)}{\sqrt{1-(4x)^2}} = \frac{1}{4}\arcsin 4x + C.$$

Пример 10. Найти интеграл $\int \frac{dx}{4+9x^2}$.

$$\int \frac{dx}{4+9x^2} = \int \frac{\frac{1}{4}\,dx}{1+\frac{9x^2}{4}} = \int \frac{\frac{1}{4}\,dx}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2} = \int \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\,d\left(\frac{3}{2}x\right)}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{d\left(\frac{3}{2}x\right)}{1+\left(\frac{3}{2}x\right)^2} = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{3}{2}x + C.$$

Применяя простейшие преобразования дифференциала и таблицу интегралов (1′) — (12′), найти неопределенные интегралы:

765. $\int (4x-7)^2\,dx$.

766. $\int (ax+b)^2\,dx\ (a \neq 0)$.

767. $\int \sqrt{6x+5}\,dx$.

768. $\int \sqrt{px+q}\,dx\ (p \neq 0)$.

769. $\int \sqrt{x^2-4}\,xdx$.

770. $\int \sqrt{x^2+a}\,xdx$.

771. $\int e^{\frac{x}{5}}\,dx$.

772. $\int a^{4x}\,dx$.

773. $\int \left(\sin\frac{x}{3} + \cos\frac{x}{3}\right)dx$.

774. $\int \sin(ax-b)\,dx\ (a \neq 0)$.

775. $\int \frac{x\,dx}{x^2+9}$.

776. $\int \frac{x\,dx}{ax^2+b}$ $(a \neq 0)$.

777. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$.

778. $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$.

779. $\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{4}}$.

780. $\int \frac{dx}{9+x^2}$.

781. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}$.

782. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

783. $\int \frac{dx}{4x^2-1}$.

784. $\int \frac{dx}{x^2-9}$.

785. $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

786. $\int \cos(b-ax)\,dx$ $(a \neq 0)$.

§ 34. Метод подстановки

Метод подстановки (метод замены переменной) основан на формуле:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

где $x = \varphi(t)$ — дифференцируемая функция новой переменной t. Часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ употребляют обратную: $t = \psi(x)$, $\psi'(x)\,dx = dt$.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

Введем новую переменную t по формуле $x = e^t$; тогда $\ln x = t$, $dx = e^t\,dt$. Подставляя эти равенства в подынтегральное выражение, находим

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \frac{t}{e^t}\,e^t dt = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int e^{x^3} x^2 dx$.

Положим $x^3 = t$, тогда $3x^2dx = dt$, $x^2dx = \frac{dt}{3}$. Подставив эти равенства в подынтегральное выражение, найдем

$$\int e^{x^3} x^2 dx = \int e^t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+4}}$.

Чтобы избавиться от корня, положим $\sqrt{x+4} = t$, тогда $x+4 = t^2$, $x = t^2 - 4$, $dx = 2t\,dt$. Следовательно,

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+4}} = \int \frac{(t^2-4)\,2t\,dt}{t} = \int (2t^2-8)\,dt = 2\int t^2 dt -$$

$$-8\int dt = 2 \cdot \frac{t^3}{3} - 8t + C.$$

Возвращаясь к переменной x, находим

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+4}} = \frac{2}{3}(\sqrt{x+4})^3 - 8\sqrt{x+4} + C = \frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+4} -$$

$$-8\sqrt{x+4} + C = \frac{2}{3}(x-8)\sqrt{x+4} + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$.

В случае, когда подынтегральное выражение содержит $\sqrt{a^2-x^2}$, целесообразно применить тригонометрическую подстановку $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$.

Положим $x = a\sin t$, тогда $dx = a\cos t\,dt$; поэтому

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a^3\sin^3 t \cdot a\cos t\,dt}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}} = \int \frac{a^3\sin^3 t \cdot a\cos t\,dt}{a\cos t} =$$

$$= a^3\int \sin^3 t\,dt = a^3\int \sin^2 t \sin t\,dt = -a^3\int (1-\cos^2 t)\,d(\cos t) =$$

$$= a^3\int (\cos^2 t - 1)\,d(\cos t) = \frac{a^3\cos^3 t}{3} - a^3\cos t + C.$$

Заметив, что $\sin t = \frac{x}{a}$, $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$, получим

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{(\sqrt{a^2-x^2})^3}{3} - a^2\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$.

Применим так называемую *подстановку Эйлера*

$$\sqrt{x^2+\alpha} = t - x,$$

где t — новая переменная. Переписав это равенство в виде $t = x + \sqrt{x^2+\alpha}$ и взяв дифференциалы от его обеих частей, получим

$$dt = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+\alpha}}\right)dx = (x+\sqrt{x^2+\alpha})\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = t\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}},$$

т. е.

$$dt = t\frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}; \quad \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \frac{dt}{t}$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x+\sqrt{x^2+\alpha}| + C.$$

Методом подстановки найти интегралы:

787. $\int \sqrt{4x+5}\,dx$.

788. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$.

789. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}}$

790. $\int (x+2)\sqrt{x+3}\,dx$.

791. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{4+3\cos x}}$.

792. $\sqrt{1+2\sin x}\cos x dx$.

793. $\int \sin^5 x \cos x dx$.

794. $\int \cos^4 x \sin x dx$.

795. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$.

796. $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$.

797. $\int x^3 e^{x^4} dx$.

798. $\int a^{\cos x} \sin x dx$.

799. $\int \frac{dx}{7-6x}$.

800. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+3} dx$.

801. $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

802. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

803. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x} dx$.

804. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^4 x}$.

805. $\int \frac{dx}{\cos x}$.

806. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

807. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

808. $\int \sqrt{x^3-27}\, x^2 dx$.

809. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.

810. $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$

§ 35. Метод интегрирования по частям

Если $u = \varphi_1(x)$, $v = \varphi_2(x)$ — дифференцируемые функции от x, то из формулы для дифференциала произведения двух функций

$$d(uv) = udv + vdu$$

получается *формула интегрирования по частям*

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (15)$$

Эта формула применяется в случае, когда подынтегральная функция представляет произведение алгебраической и трансцендентной функций. В качестве u обычно выбирается функция, которая упрощается дифференцированием, в качестве dv — оставшаяся часть подынтегрального выражения, содержащая dx, из которой можно определить v путем интегрирования.

В некоторых случаях для сведения данного интеграла к табличному формула (15) применяется несколько раз. Иногда искомый интеграл определяется из алгебраического уравнения, получающегося с помощью интегрирования по частям.

Пример 1. Найти интеграл $\int x \cos x dx$.
Обозначим $x = u$; $\cos x dx = dv$.

Для применения формулы (15) необходимо знать еще v и du. Из равенства $x = u$ получаем $dx = du$, интегрируя равенство $dv = \cos x dx = d(\sin x)$, определяем $v = \sin x$.

Подставляя значения u, v, du, dv в формулу (15), находим

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \operatorname{arctg} x dx$.

Полагая $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = dx$, находим $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$, $v = x$.

По формуле (15) получаем

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x -$$

$$- \int \frac{\frac{1}{2} d(x^2+1)}{x^2+1} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int x^2 \sin x dx$.

Полагая $u = x^2$, $dv = \sin x dx = d(-\cos x)$, получаем $du = 2x dx$, $v = -\cos x$. Следовательно,

$$\int x^2 \sin x dx = x^2(-\cos x) - \int (-\cos x) 2x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx. \quad (I)$$

Полученный интеграл снова находится интегрированием по частям (см. пример 1). Его можно найти и не вводя явно функций u и v:

$$\int x \cos x dx = \int x d(\sin x) = x \sin x -$$

$$- \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C_1.$$

Подставляя это выражение для интеграла в формулу (I), находим

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx = -x^2 \cos x +$$

$$+ 2(x \sin x + \cos x + C_1) = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x) + C,$$

где $C = 2C_1$.

Пример 4. Найти интеграл $\int \arcsin x dx$.

Полагая $\arcsin x = u$, $dx = dv$, получаем $du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $x = v$,

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Интеграл правой части этого равенства найдем методом подстановки. Положим $1 - x^2 = t$, тогда $-2x dx = dt$, $x dx = -\dfrac{dt}{2}$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

Следовательно,

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$.

Полагая $u=e^{\alpha x}$, $dv=\cos\beta x dx$, находим $du=\alpha e^{\alpha x}$, $v=\frac{1}{\beta}\sin\beta x$. Следовательно,

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx=e^{\alpha x}\frac{1}{\beta}\sin\beta x-\int\frac{1}{\beta}\sin\beta x\alpha e^{\alpha x}dx;$$

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx. \qquad (I)$$

Интеграл в правой части равенства (I) также находим методом интегрирования по частям:

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx=\int e^{\alpha x}\frac{1}{\beta}d(-\cos\beta x)=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x-$$

$$-\int\left(-\frac{1}{\beta}\cos\beta x\right)\alpha e^{\alpha x}dx=-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\int\frac{\alpha}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x dx. \qquad (II)$$

Подставив выражение (II) в равенство (I), получим

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x-\frac{\alpha}{\beta}\left(-\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\cos\beta x+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx\right)=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x-$$

$$-\frac{\alpha^2}{\beta^2}\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx.$$

Перенося интеграл в левую часть, получаем уравнение

$$\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{1}{\beta}e^{\alpha x}\sin\beta x+\frac{\alpha}{\beta^2}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

из которого находим

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x)+C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int\sqrt{x^2+a}\,dx$.

Положим $\sqrt{x^2+a}=u$, $dx=dv$, откуда $\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}}=du$, $v=x$.

По формуле (15) получаем

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=x\sqrt{x^2+a}-\int x\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части:

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{(x^2+a)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx=\int\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}}dx-a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=$$

$$=\int\sqrt{x^2+a}\,dx-a\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Следовательно,

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

откуда

$$2\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}};$$

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}\right].$$

Поскольку (см. пример 5 § 34)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a}| + C_1,$$

то

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a} + a\ln|x+\sqrt{x^2+a}|\right] + C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Применяя метод интегрирования по частям, получаем

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int 1\cdot\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\,\frac{(-2x)}{2\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Так как

$$\int \frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a},$$

то

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\arcsin\frac{x}{a},$$

откуда

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}.$$

Замечание. Этот интеграл можно найти с помощью подстановки $x = a\sin t$ (сделайте это самостоятельно).

Найти интегралы:

811. $\int xe^{4x}\,dx$.

812. $\int \ln 9x\,dx$.

813. $\int \frac{\ln 3x}{x^3}\,dx$.

814. $\int \operatorname{arctg}\frac{x}{3}\,dx$.

815. $\int x\operatorname{arctg} 7x\,dx$.

816. $\int \arccos\frac{x}{3}\,dx$.

817. $\int x\arcsin 6x\,dx$.

818. $\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$.

819. $\int x \ln^2 2x dx$.

820. $\int x^2 \sin 3x dx$.

821. $\int x^2 \ln \frac{x}{2} dx$.

822. $\int x^2 e^{-\frac{x}{4}} dx$.

823. $\int \frac{\ln 2x}{\sqrt{x}} dx$.

824. $\int \frac{x}{e^{2x}} dx$.

825. $\int \frac{x dx}{\sin^2 8x}$.

826. $\int \sin\left(\ln \frac{x}{4}\right) dx$.

827. $\int \cos\left(\ln \frac{x}{2}\right) dx$.

828. $\int \frac{\arcsin \sqrt{2x}}{\sqrt{1-2x}}$.

829. $\int e^{\sqrt{2x}} dx$.

830. $\int \frac{x \cos 2x\, dx}{\sin^2 2x}$.

§ 36. Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида

$$\int \sin ax \sin bx dx, \quad \int \cos ax \cos bx dx, \quad \int \sin ax \cos bx dx \tag{16}$$

находятся с помощью тригонометрических формул:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)].$$

Интегралы вида

$$\int \sin^n x \cos^m x dx, \tag{17}$$

где $n > 0$ и $m > 0$ — четные числа, находятся с помощью формул

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Если хотя бы одно из чисел m или n — нечетно, то интеграл берется непосредственно отделением от нечетной степени одного множителя и введением новой переменной.

Пример 1. Найти интеграл $\int \sin^4 x \cos x dx$.

Это интеграл вида (17). В данном случае $n = 4$, $m = 1$. Так как $\cos x dx = d(\sin x)$, то

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

Это также интеграл вида (17), причем $n = 3$, $m = 2$. Отделяя множитель и преобразуя подынтегральное выражение, находим

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \sin x \cos^2 x dx = -\int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x d(\cos x) =$$

$$= \int (\cos^2 x - 1) \cos^2 x d(\cos x) =$$

$$= \int \cos^4 x d(\cos x) - \int \cos^2 x d(\cos x) = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \sin 4x \sin 6x dx$.
Это первый из интегралов типа (16), в данном случае $a = 4$, $b = 6$.

Применяя первую из приведенных выше тригонометрических формул, преобразуем подынтегральную функцию и интегрируем:

$$\int \sin 4x \sin 6x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 10x) dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x dx -$$

$$- \frac{1}{2}\int \cos 10x dx = \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{20} \sin 10x + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \cos 8x \cos 3x d x$.

$$\int \cos 8x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 5x + \cos 11x) dx = \frac{1}{2}\int \cos 5x dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int \cos 11 x dx = \frac{1}{10} \sin 5x + \frac{1}{22} \sin 11x + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int \sin 6x \cos 2x dx$.

$$\int \sin 6x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 4x + \sin 8x) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 4x dx + \frac{1}{2}\int \sin 8x dx = -\frac{\cos 4x}{8} - \frac{\cos 8x}{16} + C.$$

Найти интегралы от тригонометрических функций:

831. $\int \sin x \cos^4 x dx$.

832. $\int \cos x \sin^5 x dx$.

833. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$.

834. $\int \cos^3 x \sin^4 x dx$.

835. $\int \sin^2 5x dx$.

836. $\int \cos^2 3x dx$.

837. $\int \sin^2 x \cos^2 x dx$.

838. $\int \sin^4 x \cos^4 x dx$.

839. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^2 x} dx$.

840. $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} dx$.

841. $\int \sin x \sin 3x dx$.

842. $\int \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi) dt$.

843. $\int \cos 4x \cos 2x dx$.

844. $\int \cos (x + \alpha) \cos x dx$.

845. $\int \sin 3x \cos 2x dx$.

846. $\int \sin (6x + \omega) \cos 4x dx$.

847. $\int \sin mx \cos nx dx \ (m \pm n \neq 0)$.

848. $\int \sin mx \sin nx dx$.

849. $\int \cos mx \cos nx dx \ (m \pm n \neq 0)$. **850.** 1) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; 2) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

§ 37. Интегрирование некоторых функций, содержащих квадратный трехчлен в знаменателе

Интеграл вида

$$\int \frac{dx}{px^2 + qx + r}$$

путем дополнения квадратного трехчлена до полного квадрата по формуле $px^2 + qx + r = p\left[(x + k)^2 \pm a^2\right]$ сводится к одному из двух интегралов:

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C; \tag{18}$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u - a}{u + a} \right| + C, \tag{19}$$

где $u = x + k$.

Интеграл

$$\int \frac{mx + n}{px^2 + qx + r} dx$$

сводится к интегралу (18) или (19) и интегралу

$$\int \frac{udu}{u^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(u^2 \pm a^2)}{u^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \ln |u^2 \pm a^2| + C.$$

Интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{px^2 + qx + r}}$$

сводится к одному из интегралов:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln |u + \sqrt{u^2 + a}| + C.$$

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 5}$.

Дополняя квадратный трехчлен до полного квадрата и интегрируя на основании формулы (19) для случая, когда $u = x + 2$, $a = 3$, находим

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int \frac{dx}{(x^2 + 4x + 4) - 4 - 5} = \int \frac{dx}{(x + 2)^2 - 9} =$$

$$= \int \frac{d(x + 2)}{(x + 2)^2 - 3^2} = \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{(x + 2) - 3}{(x + 2) + 3} \right| + C = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 5} \right| + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+34}}$.

Выделяя полный квадрат и применяя формулу (18) для случая, когда $u = x-3$, $a=5$, находим

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+34} = \int \frac{dx}{(x^2-6x+9)-9+34} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+25} =$$

$$= \int \frac{d(x-3)}{(x-3)^2+5^2} = \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{5} + C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{2x^2-3x+5}$.

$$\int \frac{dx}{2x^2-3x+5} = \int \frac{dx}{2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\right)} =$$

$$= \int \frac{dx}{2\left[\left(x^2-2\frac{3}{4}x+\frac{9}{16}\right)-\frac{9}{16}+\frac{5}{2}\right]} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{31}{16}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{31}}{4}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\frac{\sqrt{31}}{4}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{31}}{4}} + C = \frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x-3}{\sqrt{31}} + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{12+4x-x^2}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12+4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-4x+4)+4+12}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16-(x-2)^2}} =$$

$$= \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{4^2-(x-2)^2}} = \arcsin\frac{x-2}{4} + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+13}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+4)-4+13}} = \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2+9}} =$$

$$= \ln\left|(x+2)+\sqrt{(x+2)^2+9}\right| + C = \ln\left|(x+2)+\sqrt{x^2+4x+13}\right| + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

Перейдем к новой переменной t по формуле $x-1=\frac{1}{t}$, откуда $dx=-\frac{dt}{t^2}$, $x^2-2=\frac{1+2t-t^2}{t^2}$

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} = -\int \frac{d(t-1)}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-(t-1)^2}} =$$

$$= -\arcsin \frac{t-1}{\sqrt{2}} + C.$$

Возвращаясь к переменной x, находим

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} = \arcsin \frac{\sqrt{2}(x-2)}{2(x-1)} + C.$$

Найти интегралы:

851. $\int \frac{dx}{x^2+36}$.

852. $\int \frac{dx}{2x^2+17}$.

853. $\int \frac{dx}{x^2-49}$.

854. $\int \frac{dx}{3x^2-10}$.

855. $\int \frac{dx}{x^2-8x-9}$.

856. $\int \frac{dx}{4x^2+10x-24}$.

857. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+4}$.

858. $\int \frac{dx}{4x^2-5x+2}$.

859. $\int \frac{dx}{x^2+x+2}$.

860. $\int \frac{dx}{x^2-x-1}$.

861. $\int \frac{(x+3)\,dx}{x^2-2x-5}$.

862. $\int \frac{x-1}{x^2-x-1}\,dx$.

863. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

864. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-6x+12}}$.

865. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

866. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

867. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

868. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x}}$.

869. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

870. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+x+1}}$.

§ 38. Разные примеры на интегрирование

При нахождении интегралов от *дробных рациональных функций*, т. е. функций вида

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_mx^m}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n},$$

предварительно исключают целую часть путем деления, а остаток

$$S(x)=\frac{N_k(x)}{P_n(x)}\quad(k<n)$$

представляют в виде суммы элементарных дробей с помощью *метода неопределенных коэффициентов*. Знаменатель остатка сначала разлагают на множители вида $(x-a)^{\mu}$ и $(x^2+px+q)^{\nu}$, а сам остаток в соответствии с полученным разложением — на сумму элементарных дробей следующим образом:

$$S(x)=\frac{N_k(x)}{P_n(x)}=\frac{N_k(x)}{(x-a)^{\mu}\ldots(x^2+px+q)^{\nu}}=$$

$$=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_{\mu}}{(x-a)^{\mu}}+\ldots+\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+$$

$$+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{B_{\nu}x+C_{\nu}}{(x^2+px+q)^{\nu}}.$$

Замечание. Каждому линейному множителю кратности μ, т. е. множителю $(x-a)^{\mu}$, соответствует в разложении сумма μ элементарных дробей вида $\frac{A_i}{(x-a)^i}$ $(i=1, 2, \ldots, \mu)$, а каждому квадратному множителю кратности ν, т. е. множителю $(x^2+px+q)^{\nu}$, — сумма ν элементарных дробей вида $\frac{B_ix+C_i}{(x^2+px+q)^i}$ $(i=1,2, \ldots, \nu)$. В последнем случае числители дробей являются не постоянными A_i, а линейными функциями от x (B_ix+C_i).

Пример 1. Найти интеграл $\int\frac{x^5-x+1}{x^3+x}dx$.

Подынтегральная функция является рациональной функцией, т. е. отношением двух многочленов. Поскольку степень числителя выше степени знаменателя, можно выделить целую часть. В результате деления числителя на знаменатель получим

$$\frac{x^5-x+1}{x^3+x}=x^2-1+\frac{1}{x^3+x}\qquad(I)$$

Интегралы от первых двух слагаемых находятся непосредственно. Чтобы найти интеграл от остатка, т. е. от третьего слагаемого, представим его в виде суммы элементарных дробей. Разложим сначала знаменатель остатка на множители. Так как $x^3+x=x(x^2+1)$ и x^2+1 на линейные множители не разлагается, то знаменатель представляет собой произведение двух простых множителей, один из которых — линейный, другой — квадратный.

В соответствии с общей формулой разложение на элементарные дроби должно иметь вид

$$\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1},\qquad(II)$$

где коэффициенты A, B, C пока не определены. Приводя правую часть к общему знаменателю, находим

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}$$

или

$$1 = (A+B)x^2 + Cx + A.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем уравнения: $A+B=0$, $C=0$, $A=1$, из которых находим $A=1$, $B=-1$, $C=0$.

Таким образом, разложение (II) принимает вид

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1},$$

поэтому

$$\int \frac{dx}{x^3+x} = \int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{x^2+1} =$$

$$= \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C.$$

Принимая во внимание полученный результат и формулу (I), находим исходный интеграл

$$\int \frac{x^5-x+1}{x^3+1}\,dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^3+x}\right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right| + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}\,dx$.

Разлагая знаменатель на множители, получаем

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x(x^2-1) - 2(x-1) =$$

$$= (x-1)[x(x+1)-2] = (x-1)(x^2+x-1-1) = (x-1)^2(x+2).$$

Подынтегральную функцию представим в виде суммы элементарных дробей

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}, \qquad (I)$$

откуда

$$(x^2+x+1) = A(x-1)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x+2) \qquad (II)$$

или

$$(x^2+x+1) = (A+B)x^2 + (B+C-2A)x + (A-2B+2C).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем уравнения: $A+B=1$, $B+C-2A=1$, $A-2B+2C=1$, из которых находим $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{2}{3}$, $C=1$.

Следовательно, разложение (I) примет вид

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2} = \frac{1}{3(x+2)} + \frac{2}{3(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2},$$

тогда

$$\int \frac{x^2+x+1}{x^3-3x+2}\,dx = \int\left[\frac{1}{3(x+2)} + \frac{2}{3(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}\right]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(x+2)}{x+2} + \frac{2}{3}\int \frac{d(x-1)}{x-1} + \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{3}\ln|x+2| +$$

$$+ \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C = \frac{1}{3}\ln[(x+2)(x-1)^2] - \frac{1}{x-1} + C.$$

Замечание. Коэффициенты A, B, C разложения (I) можно было найти и по-другому. Полагая в тождестве (II) $x=1$, получаем $3=C\cdot 3$, или $C=1$. Положив в том же тождестве $x=-2$, получим $3=A(-3)^2$, или $A=\frac{1}{3}$. Аналогичным способом при $x=0$ находим $1=A-2B+2C$, или $B=\frac{2}{3}$.

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$.

Разлагая знаменатель на множители, получаем

$$x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1 = x^4(x-1)+2x^2(x-1)+$$

$$+(x-1) = (x-1)(x^4+2x^2+1) = (x-1)(x^2+1)^2.$$

В данном случае разложение в сумму элементарных дробей должно иметь вид

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

откуда

$$1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1).$$

Полагая в этом тождестве $x=1$, находим $1=A\cdot 4$, т. е. $A=\frac{1}{4}$. Придавая x соответственно значения $x=0$, $x=-1$, $x=i=\sqrt{-1}$, получаем уравнения $1=A-C-E$; $1=4A+4B-4C+2D-2E$; $1=(Di+E)(i-1)$ или $1=-D-Di+Ei-E$, т. е. $1=-D-E+(E-D)i$, откуда $1=-D-E$, $E-D=0$.

Решив полученные уравнения, найдем $B=-\frac{1}{4}$, $C=-\frac{1}{4}$, $D=-\frac{1}{2}$, $F=-\frac{1}{2}$. Таким образом,

$$\int \frac{dx}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1} = \int\left[\frac{1}{4(x-1)} - \frac{x+1}{4(x^2+1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{x+1}{2(x^2+1)^2}\right]dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(x-1)}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} -$$

$$- \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{8}\ln(x^2+1) - \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{4}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} -$$

$$- \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4\cdot 2}\ln(x^2+1) -$$

$$-\frac{1}{4}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg} x-\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{1+x^2}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+\frac{1-x}{4(x^2+1)}+C.$$

Замечание. Интеграл $\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}$ найден с помощью подстановки $x=\operatorname{tg} t$. Так как отсюда $dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt$, то

$$\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\int\frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{(\operatorname{tg}^2 t+1)^2}=\int\cos^2 t\,dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}+C$$

$$\left(\sin 2t=2\sin t\cos t=2\frac{\sin t}{\cos t}\cos^2 t=2\operatorname{tg} t\cos^2 t=2x\cdot\frac{1}{1+x^2}\right).$$

Найти интегралы от рациональных функций:

871. $\int\frac{x^4+x^3+2x}{x^3+x^2+x+1}dx$. **872.** $\int\frac{(x+2)\,dx}{x^3-8x^2+19x-12}$.

873. $\int\frac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^3+x}dx$. **874.** $\int\frac{dx}{x^3-3x+2}$.

875. $\int\frac{dx}{x^4+4x^3+5x^2+4x+4}$. **876.** $\int\frac{3x^3-6x^2-17}{x^4-2x^3+5x^2-8x+4}$.

877. $\int\frac{3x^4-2x^3+5x^2+10x+18}{x^5-2x^3-2x^2-3x-2}dx$.

878. $\int\frac{2x^4-10x^3+7x^2+4x+3}{x^5-2x^3+2x^2-3x+2}dx$.

879. $\int\frac{(x^4+1)\,dx}{x^5-x^4+2x^3-2x^2+x-1}$.

880. $\int\frac{4x\,dx}{x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1}$.

Найти интегралы:

881. 1) $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$; 2) $\int\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}dx$.

882. 1) $\int\frac{\sin 2x}{\cos^4 x}dx$; 2) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^4 x}dx$.

883. 1) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx$; 2) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x}\,dx$.

884. 1) $\int \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^2 x}\,dx$; 2) $\int \frac{\sin^3 x + 1}{\cos^2 x}\,dx$.

885. 1) $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$; 2) $\int \sqrt{2x^2+3}x\,dx$.

886. 1) $\int \sqrt[3]{x^3+8}\,x^2dx$; 2) $\int \sqrt[3]{x^4+5}\,x^3dx$.

887. 1) $\int \frac{x^2}{1-x^3}\,dx$; 2) $\int \frac{3x^3}{2x^4+7}\,dx$.

888. 1) $\int \frac{dx}{(a+bx)^2}$; 2) $\int \frac{dx}{(a-bx)^3}$.

889. 1) $\int \sqrt{1+\cos x}\sin x\,dx$; 2) $\int \sqrt{2+3\cos x}\sin x\,dx$.

890. 1) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}\,dx$; 2) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{3+2\sin x}}\,dx$.

891. 1) $\int \frac{dx}{2x^2+12x-14}$; 2) $\int \frac{dx}{3x^2-12x-15}$.

892. 1) $\int \frac{dx}{3x^2+6x+15}$; 2) $\int \frac{dx}{2x^2+8x+16}$.

893. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+6}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x-3}}$.

894. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{10+8x-2x^2}}$; 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{21-8x-4x^2}}$.

895. 1) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx$; 2) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}$.

896. 1) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$; 2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{ax+b}}$.

897. 1) $\int x\,\mathrm{arcctg}\,x$; 2) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}\,dx$.

898. 1) $\int x^3 \ln^2 x dx$; 2) $\int x^3 e^x dx$.

Глава VIII. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Пусть на отрезке $[a; b]$ определена функция $y = f(x)$. Отрезок $[a; b]$ разобьем на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. В каждом из элементарных отрезков длины $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,2, \ldots, n)$ произвольным образом выберем точку z_i и составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,\Delta x_i = f(z_1)\,\Delta x_1 + f(z_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(z_n)\,\Delta x_n.$$

Сумма эта называется *интегральной суммой* функции $y=f(x)$ в промежутке $[a; b]$.

Обозначим λ длину наибольшего из элементарных отрезков, т. е. $\lambda = \max \Delta x_i$.

Определенным интегралом от функции $y=f(x)$ в промежутке $[a; b]$ называется предел ее интегральной суммы, когда число элементарных отрезков неограниченно возрастает, а длина наибольшего из них стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\,\Delta x_i. \qquad (1)$$

Если функция $y=f(x)$ непрерывна, то предел (1) существует и конечен.

Свойства определенного интеграла. 1. Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

2. Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

3. При перемене мест пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

4. Если промежуток интегрирования разбит на части, то определенный интеграл по всему промежутку равен сумме определенных интегралов по частичным промежуткам:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

5. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций:

$$\int_a^b [f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx + \int_a^b f_3(x)\,dx.$$

6. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

7. Если подынтегральная функция непрерывна, то производная определенного интеграла с переменным верхним пределом равна значению подынтегральной функции для этого предела:

$$\left[\int_a^t f(x)\,dx\right]' = f(t); \quad \frac{d}{dt}\int_a^t f(x)\,dx = f(t).$$

§ 39. Формула Ньютона—Лейбница

Теорема Ньютона—Лейбница. *Определенный интеграл от непрерывной функции в данном промежутке равен разности значений любой первообразной этой функции для верхнего и нижнего пределов интегрирования:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{2}$$

где $F'(x) = f(x)$.

Замена переменной в определенном интеграле осуществляется по формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt, \tag{3}$$

где $x = \varphi(t)$; $a = \varphi(\alpha)$; $b = \varphi(\beta)$; t — новая переменная; α, β — новые пределы интегрирования.

Интегрирование по частям в определенном интеграле:

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x)$$

или

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) - \int_a^b v(x)\,u'(x)\,dx.$$

Если m — наименьшее, а M — наибольшее значение непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \tag{4}$$

Неравенства (4) позволяют оценить определенный интеграл, т. е. указать пределы, между которыми находится его величина.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $\int_2^4 x^3 dx$.

По формуле (2) находим

$$\int_2^4 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_2^4 = \frac{4^4}{4} - \frac{2^4}{4} = 64 - 4 = 60.$$

Замечание. В соответствии с теоремой Ньютона—Лейбница можно брать любую первообразную подынтегральной функции. В данном случае вместо $\frac{x^4}{4}$ можно было бы взять $\frac{x^4}{4} + 3$, которая также будет первообразной для функции $y = x^3$:

$$\int_2^4 x^3 dx = \left(\frac{x^4}{4} + 3\right)\Big|_2^4 = \left(\frac{4^4}{4} + 3\right) - \left(\frac{2^4}{4} + 3\right) = (64 + 3) - (4 + 3) = 60.$$

Тот же результат получается и в общем случае:

$$\int_2^4 x^3 dx = \left(\frac{x^4}{4} + C\right)\Big|_2^4 = 60.$$

Так как результат получается один и тот же, в дальнейшем будем рассматривать лишь ту первообразную, для которой постоянное слагаемое равно нулю.

Пример 2. Вычислить интеграл $\int_2^4 (32 + 28x - 9x^2)\, dx$.

Принимая во внимание свойства определенного интеграла, получаем

$$\int_2^4 (32 + 28x - 9x^2)\, dx = \int_2^4 32\, dx + \int_2^4 28\, x - \int_2^4 9x^2 dx =$$

$$= 32\int_2^4 dx + 28\int_2^4 x dx - 9\int_2^4 x^2 dx = 32\, x\Big|_2^4 + 28 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 -$$

$$- 9\frac{x^3}{3}\Big|_2^4 = 32\,(4 - 2) + 14\,(4^2 - 2^2) - 3\,(4^3 - 2^3) = 32 \cdot 2 +$$

$$+ 14 \cdot 12 - 3 \cdot 56 = 64.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{2x - x^2 - 1}{x + 1} dx$.

Поскольку $\frac{2x - x^2 - 1}{x + 1} = -x + 3 - \frac{4}{x + 1}$, то

$$\int_0^1 \frac{2x - x^2 - 1}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(-x + 3 - \frac{4}{x+1}\right) dx = -$$

$$-\int_0^1 x\,dx + 3\int_0^1 dx - 4\int_0^1 \frac{d(x+1)}{x+1} = -\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 3x\Big|_0^1 - 4\ln(x+1)\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2} + 3 - 4\ln 2 = 2{,}5 - 4\ln 2 \approx -0{,}2724.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d\varphi$.

Переменная интегрирования обозначена буквой φ. Преобразуя подынтегральную функцию, получаем

$$\sin^4 \varphi = \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi).$$

Следовательно,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi - \frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\varphi d(2\varphi) + \frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{8}\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{32}\sin 4\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8}\pi.$$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx$.

Введем новую переменную по формуле $t = \sqrt{2-x}$, из которой получим $t^2 = 2 - x$, $x = 2 - t^2$, $dx = -2tdt$.

Вычисляем новые пределы интегрирования с помощью формулы $t = \sqrt{2-x}$. Поскольку при $x = 1$ $t = \sqrt{2-1} = 1$, то $\alpha = 1$; далее, при $x = 2$ $t = 0$, поэтому $\beta = 0$.

Формула (3) в данном случае принимает вид

$$\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx = \int_1^0 (2 - t^2)\,t\,(-2tdt) = \int_1^0 (2t^4 - 4t^2)\,dt.$$

Вычисляя последний интеграл, находим

$$\int_1^0 (2t^4 - 4t^2)\,dt = 2\int_1^0 t^4 dt - 4\int_1^0 t^2 dt =$$

$$= 2\cdot\frac{t^5}{5}\Big|_1^0 - 4\,\frac{t^3}{3}\Big|_1^0 = -\frac{2}{5} + \frac{4}{3} = \frac{14}{15}.$$

Следовательно,

$$\int_1^2 x\sqrt{2-x}\,dx = \frac{14}{15}.$$

Пример 6. Вычислить интеграл $\int_{\sqrt{2}}^{2} x^2\sqrt{8-2x^2}dx$.

Введем новую переменную по формуле $x = 2\sin t$. Поскольку $dx = 2\cos t dt$, $t = \arcsin\frac{x}{2}$, $t_1 = \frac{\pi}{4}$ при $x = \sqrt{2}$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$ при $x = 2$, то

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} x^2\sqrt{8-2x^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (2\sin t)^2\sqrt{8-2(2\sin t)^2}\;2\cos t dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\sqrt{8-8\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 16\sqrt{2}\sin^2 t\cos^2 t dt =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\sqrt{2}\sin^2 2t dt = 2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\left(t - \frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

Пример 7. Вычислить интеграл $\int_0^{2\pi} x\sin\frac{x}{2}\,dx$.

Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^{2\pi} x\sin\frac{x}{2}\,dx = -2\int_0^{2\pi} x d\left(\cos\frac{x}{2}\right) = -2x\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} +$$

$$+ 2\int_0^{2\pi}\cos\frac{x}{2}\,dx = -2x\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} + 4\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= -2\left(2\pi\cos\frac{2\pi}{2} - 0\cdot\cos 0\right) + 4\left(\sin\frac{2\pi}{2} - \sin 0\right) = 4\pi.$$

Пример 8. Оценить интеграл $\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1+\frac{9}{16}\sin^2 t}}$.

Поскольку подынтегральная функция $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{10}\sin^2 t}}$ в данном промежутке $[0; \pi]$ имеет наименьшее значение $m = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{4}{5}$ и наибольшее значение $M = 1$, то в соответствии с формулой (4) получаем

$$\frac{4}{5}\pi \leqslant \int_0^{\pi} \frac{dt}{\sqrt{1+\frac{9}{16}\sin^2 t}} \leqslant \pi.$$

Вычислить определенные интегралы:

899. $\int_1^3 (x+1)^2\,dx$.

900. $\int_{-2}^1 (2 - x - x^2)\,dx$.

901. $\int_1^6 \left(7 - x - \frac{6}{x}\right) dx$.

902. $\int_{-1}^0 e^{x+1}\,dx$.

903. $\int_0^{\pi} (7 + 12\cos\varphi + 6\cos^2\varphi + \cos^3\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$.

904. $\int_{-\pi}^0 (1 + 4\cos\varphi + 6\cos^2\varphi + 4\cos^3\varphi + \cos^4\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$.

905. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\,dt$.

906. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\alpha\,d\alpha$.

907. $\int_1^8 \left(4\sqrt[3]{x} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx$.

908. $\int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 6x - 16}$.

909. $\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$.

910. $\int_3^8 \frac{dx}{x^2 - 6x + 34}$.

911. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$.

912. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{6-4x-2x^2}}$.

913. $\int\limits_{1}^{6} \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$.

914. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$.

915. $\int\limits_{0}^{a} x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

916. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$.

917. $\int\limits_{0}^{1} xe^x dx$.

918. $\int\limits_{0}^{2\pi} x\cos^2 x dx$.

Оценить определенные интегралы:

919. $J=\int\limits_{0}^{\pi}\sqrt{4+5\sin^2 x}dx$.

920. $J=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{9-5\cos^2 x}dx$.

921. $J=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^4+1}$.

922. $J=\int\limits_{0}^{1,5}\frac{dx}{2+\sin x}$.

§ 40. Приближенное вычисление определенных интегралов

Точное вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона—Лейбница не всегда возможно или целесообразно. В этих случаях, а также в случае, когда подынтегральная функция задана табличным способом, определенные интегралы вычисляют приближенно.

К простейшим формулам приближенного вычисления определенных интегралов относятся формулы прямоугольников, формула трапеций, формула парабол (формула Симпсона).

Формулы прямоугольников имеют вид:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \approx h\sum_{k=0}^{n-1} y_k = h\,(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}); \qquad (5)$$

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx \approx h\sum_{k=1}^{n} y_k = h\,(y_1+y_2+\ldots+y_n), \qquad (6)$$

где

$$h=\frac{b-a}{n};\ y_k=f(x_k);\ x_k=a+kh\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (7)$$

Формула (5) называется *формулой левых прямоугольников* (рис. 56, *а*), формула (6) — *правых прямоугольников* (рис. 56, *б*).

Абсолютная погрешность метода прямоугольников определяется формулой

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{(b-a)^2 M}{2n}, \qquad (8)$$

где $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$; $R_n(f)$ — разность между точным и приближенным значениями, получаемыми по формуле (5) или (6).

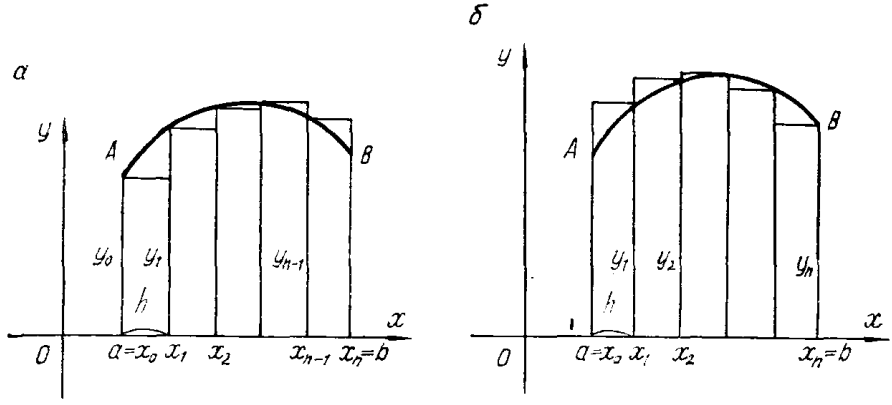


Рис. 56

Среднее арифметическое формул (5) и (6) дает *формулу трапеций*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} y_k + \sum_{k=0}^{n-1} y_{k+1}\right) = h\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{y_k + y_{k+1}}{2}\right) =$$

$$= h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right) =$$

$$= \frac{h}{2}[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + y_n]. \qquad (9)$$

Правая часть формулы (9) выражает площадь фигуры, состоящей из трапеций, высота каждой из которых равна h (рис. 57).

Остаточный член R_n приближенной формулы (9) удовлетворяет неравенству

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}, \qquad (10)$$

где $M = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|$.

Формула парабол (или *формула Симпсона*) имеет вид

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + y_{2n}], \qquad (11)$$

где

$$h = \frac{b-a}{2n};\ x_k = a + kh;\ y_k = f(x_k)\ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n). \quad (12)$$

Для остаточного члена R_n формулы (11) выполняется неравенство

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^5 M}{180 \cdot (2n)^4}$$

где

$$M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{IV}(x)|.$$

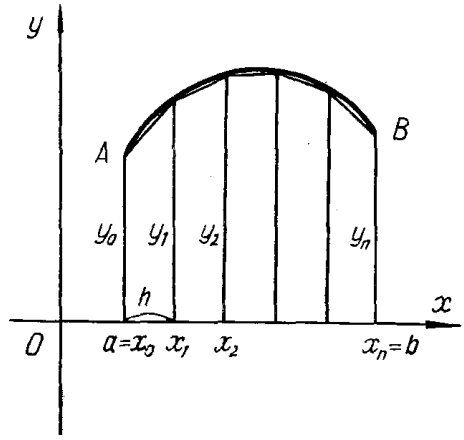


Рис. 57

Пример 1. По формулам прямоугольников, приняв $n = 4$, вычислить $\int_1^9 \frac{dx}{x+2}$.

В данном случае $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $a = 1$, $b = 9$. С помощью формул (7) находим: $h = 2$; $x_0 = 1$; $x_1 = 3$; $x_2 = 5$; $x_3 = 7$; $x_4 = 9$ ($x_0 = a = 1$, $x_4 = b = 9$);

$$y_0 = f(x_0) = \frac{1}{x_0+2} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3};$$

$$y_1 = f(x_1) = \frac{1}{x_1+2} = \frac{1}{5};\ y_2 = f(x_2) = \frac{1}{7};\ y_3 = f(x_3) = \frac{1}{9};\ y_4 = f(x_4) = \frac{1}{11}.$$

По формулам (5) и (6) получаем

$$J_л = h(y_0 + y_1 + y_2 + y_3) = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) \approx 1{,}57046;$$

$$J_л = h(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) \approx 1{,}0753.$$

Замечание. По формуле Ньютона — Лейбница

$$J = \int_1^9 \frac{dx}{x+2} = \int_1^2 \frac{d(x+2)}{x+2} = \ln(x+2)\Big|_1^9 \approx 1{,}2993.$$

Следовательно, в данной задаче $J_п < J < J_л$.

Пример 2. На сколько частей следует разбить промежуток интегрирования, чтобы с точностью до 0,1 вычислить $\int_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$?

Абсолютная погрешность при вычислении определенного интеграла по методу прямоугольников определяется формулой (8). Если ставится задача, чтобы $|R_n(f)| \leqslant \varepsilon$, т. е. $\frac{(b-a)^2 M}{2n} \leqslant \varepsilon$, то

$$n \geqslant \frac{(b-a)^2 M}{2\varepsilon}. \quad (I)$$

В данном случае $a = 2$, $b = 7$, $\varepsilon = 0{,}1$. Так как $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$, $f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}$, $M = \max\limits_{2 \leqslant x \leqslant 7} |f'(x)| = \frac{1}{16}$, то

$$n \geqslant \frac{(7-2)^2 \cdot \frac{1}{16}}{2 \cdot 0{,}1} \approx 7{,}8.$$

Поскольку n — целое число, можно принять $n = 8$ (для удобства вычислений можно взять $n = 10$, так как $b - a = 5$).

Пример 3. Вычислить приближенно интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ по формуле трапеций, приняв $n = 5$.

В данном случае по расчетной формуле $x_k = x_0 + kh$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$, где $h = \frac{1-0}{5} = 0{,}2$, находим $x_1 = 0 + 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}4$, $x_3 = 0{,}6$, $x_4 = 0{,}8$, $x_5 = 1$.

Так как $y = \frac{1}{1+x}$, то $y_k = \frac{1}{1+x_k}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$. Значения y_k находим с помощью таблицы обратных величин:

$$y_0 = \frac{1}{1+x_0} = 1; \quad y_1 = \frac{1}{1+x_1} = \frac{1}{1{,}2} = 0{,}833; \quad y_2 = \frac{1}{1+x_2} = \frac{1}{1{,}4} = 0{,}714;$$
$$y_3 = 0{,}625; \quad y_4 = 0{,}556; \quad y_5 = 0{,}500.$$

По формуле (9) получаем

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1-0}{5}(0{,}500 + 0{,}833 + 0{,}714 + 0{,}625 + 0{,}556 + 0{,}250) = 0{,}696.$$

Найденное значение отличается третьим десятичным знаком от истинного значения

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} = \int\limits_0^1 \frac{d(1+x)}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0{,}693.$$

Пример 4. На сколько частей нужно разбить промежуток интегрирования, чтобы по формуле трапеций вычислить интеграл $\int\limits_1^4 x(\ln x - 1)\,dx$ с точностью $\varepsilon_1 = 0{,}1$; $\varepsilon_2 = 0{,}01$; $\varepsilon_3 = 0{,}001$?

Для определения числа n отрезков, на которые нужно разбить промежуток интегрирования, воспользуемся формулой (10). Неравенство $|R_n| \leqslant \varepsilon$ будет выполнено, если

$$\frac{(b-a)^3 M}{12n^2} \leqslant \varepsilon,$$

откуда

$$n \geqslant \sqrt{\frac{(b-a)^3 M}{12\varepsilon}} \qquad (I)$$

Поскольку $f(x) = x(\ln x - 1)$, $f'(x) = \ln x$, $f''(x) = \dfrac{1}{x}$,

$$M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)| = \max_{1 \leqslant x \leqslant 4} \frac{1}{x}, \text{ то}$$

$$n_1 \geqslant \sqrt{\frac{(4-1)^3 \cdot 1}{12 \cdot 0{,}1}} = \sqrt{\frac{27 \cdot 10}{12}} = \sqrt{22{,}5};\ n_1 = 5;$$

$$n_2 \geqslant \sqrt{\frac{(4-1)^3 \cdot 1}{12 \cdot 0{,}01}} = \sqrt{\frac{27 \cdot 100}{12}} = \sqrt{225} = 15;\ n_2 = 15;$$

$$n_3 \geqslant \sqrt{\frac{(4-1)^3 \cdot 1}{12 \cdot 0{,}001}} = \sqrt{\frac{27 \cdot 1000}{12}} = \sqrt{2250};\ n_3 = 49.$$

Пример 5. По формуле парабол вычислить $\int_0^1 \dfrac{dx}{x^2+1}$, приняв $2n = 8$.

По первой из формул (12) находим $h = \dfrac{b-a}{2n} = \dfrac{1-0}{8} = 0{,}125$. Составляем таблицу значений $y_k = f(x_k) = \dfrac{1}{x_k^2+1}$ (табл. 5). В последней строке этой таблицы стоят числа, равные суммам чисел, находящихся в соответствующих столбцах.

Таблица 5

k	x_k	x_k^2+1	$y_0,\ y_{2n}$	y_k (k — нечетное)	y_k (k — четное)
0	0	1	1		
1	0,125	1,01563		$y_1=0{,}98461$	
2	0,250	1,06250			$y_2=0{,}94118$
3	0,375	1,14063		$y_3=0{,}87670$	
4	0,500	1,25000			$y_4=0{,}80000$
5	0,625	1,39063		$y_5=0{,}71910$	
6	0,750	1,56250			$y_6=0{,}64000$
7	0,875	1,76563		$y_7=0{,}56637$	
8	1,000	2	0,5		
Σ			1,5	3,14678	2,38118

По формуле (11) получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8] =$$

$$= \frac{1}{24}(1 + 4 \cdot 3{,}14678 + 2 \cdot 2{,}38118 + 0{,}5) =$$

$$= \frac{1}{24}(1 + 12{,}58712 + 4{,}76236 + 0{,}5) = \frac{18{,}84948}{24} = 0{,}785395.$$

Замечание. По формуле Ньютона — Лейбница находим

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785398.$$

По формуле левых прямоугольников, приняв $n = 6$, вычислить интегралы:

923. $\int_0^3 \frac{dx}{x+3}$ **924.** $\int_2^8 \sqrt{x+2}\,dx.$ **925.** $\int_0^6 \sqrt{x^2+6}\,dx.$

926. $\int_0^6 \frac{dx}{x^2+1}$. **927.** $\int_1^7 \sqrt{x^4+1}\,dx.$ **928.** $\int_0^{1,2} \cos\sqrt{x}\,dx.$

По формуле правых прямоугольников, приняв $n = 8$, вычислить интегралы:

929. $\int_1^9 \frac{dx}{x+1}$. **930.** $\int_0^4 \frac{dx}{x^4+1}$. **931.** $\int_2^{10} \sqrt{x^3+1}\,dx.$

932. $\int_0^{1,2} \cos x^2 dx.$ **933.** $\int_0^{0,8} \sin\sqrt{x}\,dx.$ **934.** $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x^3}$

На сколько частей следует разбить промежуток интегрирования, чтобы по формулам прямоугольника вычислить следующие интегралы с точностью до 0,1?

935. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos 4x dx.$ **936.** $\int_1^2 \ln x dx.$ **937.** $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$.

938. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin\frac{x}{2} dx.$ **939.** $\int_0^1 e^{3x} dx.$ **940.** $\int_2^5 x^2 dx.$

По формуле трапеций, приняв $n = 10$, вычислить следующие интегралы при указанных значениях параметра p:

941. $\int_0^1 \frac{dx}{1+px}$: 1) $p = 1$; 2) $p = 2$; 3) $p = 3$; 4) $p = 4$; 5) $p = 5$; 6) $p = 6$; 7) $p = 7$; 8) $p = 8$; 9) $p = 9$; 10) $p = 10$.

942. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+p^2}$: 1) $p=1$; 2) $p=2$; 3) $p=3$; 4) $p=4$; 5) $p=5$; 6) $p=6$; 7) $p=7$; 8) $p=8$; 9) $p=9$; 10) $p=10$.

943. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3+p}$: 1) $p=1$; 2) $p=2$; 3) $p=3$; 4) $p=4$; 5) $p=5$; 6) $p=6$; 7) $p=7$; 8) $p=8$; 9) $p=9$; 10) $p=10$.

944. На сколько частей нужно разбить промежуток интегрирования, чтобы по формуле трапеций с точностью до 0,001 вычислить интегралы: 1) $\int_1^3 \frac{dx}{x}$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}\,dx$; 3) $\int_0^{1,2} \sin x dx$?

945. По формуле трапеций с точностью до 0,01 вычислить интегралы: 1) $\int_0^3 \frac{dx}{x+2}$; 2) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; 3) $\int_0^{1,2} e^x dx$.

По формуле парабол, приняв $2n=10$, вычислить интегралы при указанных значениях параметра p:

946. $\int_0^1 \frac{dx}{x+p}$: 1) $p=1$; 2) $p=2$; 3) $p=3$; 4) $p=4$; 5) $p=5$; 6) $p=6$; 7) $p=7$; 8) $p=8$; 9) $p=9$; 10) $p=10$.

947. $\int_0^1 \frac{dx}{1+px^2}$: 1) $p=1$; 2) $p=2$; 3) $p=3$; 4) $p=4$; 5) $p=5$; 6) $p=6$; 7) $p=7$; 8) $p=8$; 9) $p=9$; 10) $p=10$.

948. $\int_0^1 \frac{dx}{1+px^3}$: 1) $p=1$; 2) $p=2$; 3) $p=3$; 4) $p=4$; 5) $p=5$; 6) $p=6$; 7) $p=7$; 8) $p=8$; 9) $p=9$; 10) $p=10$.

949. На сколько частей нужно разбить промежуток интегрирования, чтобы по формуле парабол с точностью до 0,001 вычислить интегралы: 1) $\int_0^3 \frac{dx}{x+2}$; 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$; 3) $\int_1^2 e^x dx$?

950. По формуле парабол с точностью до 0,001 вычислить интегралы: 1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{x}{2}\,dx$; 2) $\int_1^2 \ln 2x\,dx$; 3) $\int_1^2 e^x dx$.

§ 41. Площадь криволинейной фигуры

Площадь криволинейной трапеции $AabB$ (рис. 58), ограниченной сверху графиком функции $y = f(x) \geqslant 0$, слева и справа—соответственно прямыми $x = a$, $x = b$, снизу — осью Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{или} \quad S = \int_a^b y\,dx. \tag{13}$$

Если функция задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, то

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

Площадь криволинейной фигуры $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 59), ограниченной сверху и снизу соответственно линиями $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, слева и справа — прямыми $x = a$ и $x = b$, определяется формулой

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]\,dx \quad \text{или} \quad S = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx. \tag{14}$$

Площадь криволинейной трапеции $CcdD$ (рис. 60, *а*), прилежащей к оси Oy, вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d \varphi(y)\,dy \quad \text{или} \quad S = \int_c^d x\,dy \tag{15}$$

($x = \varphi(y)$ — уравнение дуги CD, ограничивающей трапецию справа, $y = c$, $y = d$ — уравнения прямых, ограничивающих ее соответственно снизу и сверху).

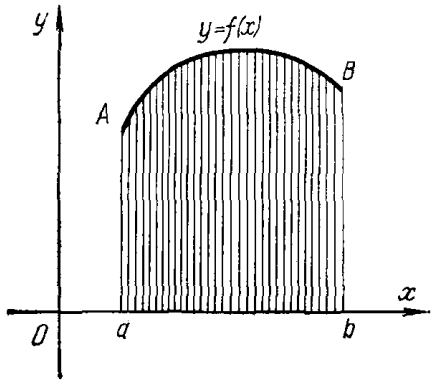


Рис. 58

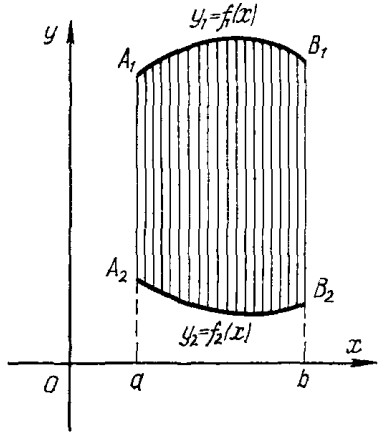


Рис. 59

Площадь криволинейной фигуры $C_1C_2D_2D_1$ (рис. 60, *б*), ограниченной справа — линией $x_1 = \varphi_1(y)$, слева — линией $x_2 = \varphi_2(y)$, снизу — прямой $y = c$, сверху — прямой $y = d$, определяется формулой

$$S = \int_c^d [\varphi_1(y) - \varphi_2(y)]\, dy \quad \text{или} \quad S = \int_c^d (x_1 - x_2)\, dy\,. \tag{16}$$

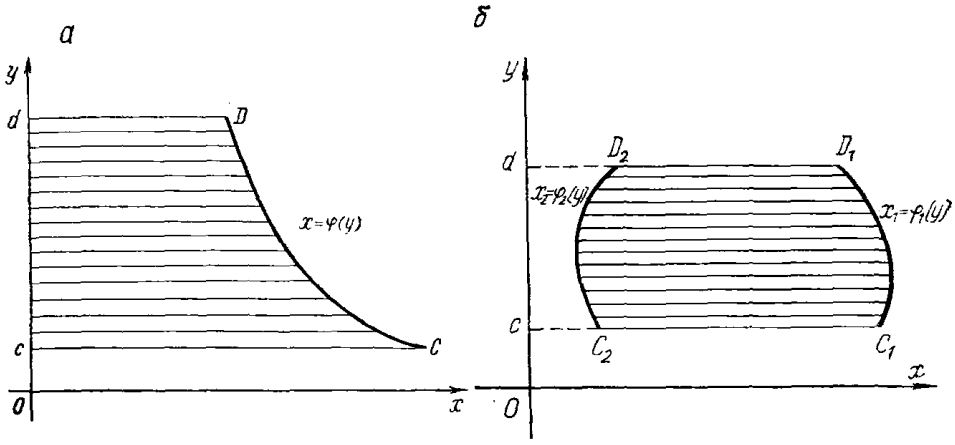


Рис. 60

Площадь сектора OAB (рис. 61), ограниченного дугой AB линии, заданной уравнением $r = r(\varphi)$ в полярных координатах, и двумя полярными радиусами OA и OB, для которых соответственно $\varphi_1 = \alpha$, $\varphi_2 = \beta$, вычисляется по формуле

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2 d\varphi.$$

Пример 1. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = x^2$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$ (рис. 62).

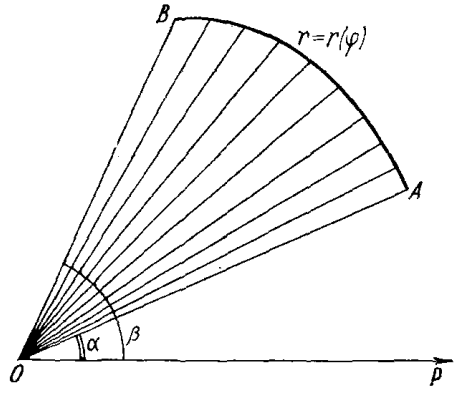


Рис. 61

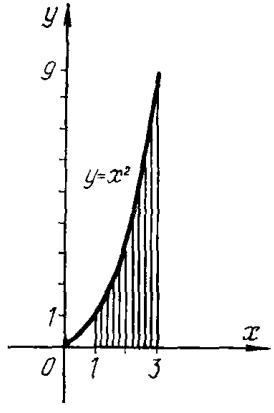


Рис. 62

Искомую площадь вычисляем по формуле (13). Подставляя в нее выражение для y, значения пределов интегрирования $a = 1$, $b = 3$, получаем

$$S = \int_1^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{1}{3}(3^3 - 1^3) = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}.$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = 2x - x^2 + 8$ и осью Ox.

Чтобы определить пределы интегрирования, найдем точки пересечения линии (параболы) с осью Ox (рис. 63). Решая систему уравнений $y = 2x - x^2 + 8$, $y = 0$, получаем $x_1 = -2$, $x_2 = 4$; следовательно, $a = -2$, $b = 4$.

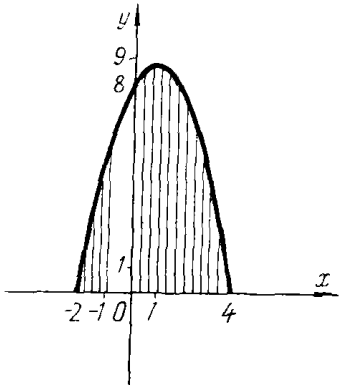


Рис. 63

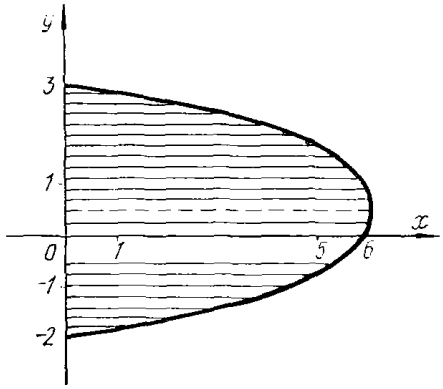


Рис. 64

По формуле (13) находим

$$S = \int_{-2}^{4} (2x - x^2 + 8)\,dx = 2\int_{-2}^{4} x\,dx - \int_{-2}^{4} x^2 dx + 8\int_{-2}^{4} dx =$$

$$= x^2\Big|_{-2}^{4} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{4} + 8x\Big|_{-2}^{4} = (16 - 4) - \frac{1}{3}(64 + 8) + 8(4 + 2) = 36.$$

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x = y - y^2 + 6$ и осью Oy.

Данная фигура представляет собой криволинейную трапецию, прилежащую к оси Oy (рис. 64). Найдем точки пересечения линии с осью Oy, для чего решим систему уравнений $x = y - y^2 + 6$, $x = 0$. Из этой системы получаем $y_1 = -2$, $y_2 = 3$. Это означает, что в формуле (15), которой здесь необходимо пользоваться, нужно положить $c = -2$, $d = 3$. Следовательно,

$$S = \int_{-2}^{3} (y - y^2 + 6)\,dx = \frac{y^2}{2}\Big|_{-2}^{3} - \frac{y^3}{3}\Big|_{-2}^{3} + 6y\Big|_{-2}^{3} =$$

$$= \frac{1}{2}(9 - 4) - \frac{1}{3}(27 + 8) + 6(3 + 2) = 20\frac{5}{6}.$$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + 4y^2 = 8$, $x^2 - 4y = 0$.

Данная фигура ограничена сверху дугой эллипса $x^2 + 4y^2 = 8$, снизу — дугой параболы $x^2 = 4y$ (рис. 65).

Площадь вычислим по формуле (14). Решая систему уравнений $x^2 + 4y^2 = 8$, $x^2 = 4y$, находим $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ — абсциссы точек пересечения заданных линий. Следовательно, $a = -2$, $b = 2$. Каждое из уравнений разрешаем относительно y:

$$y_1 = \frac{\sqrt{8 - x^2}}{2}; \quad y_2 = \frac{x^2}{4}$$

(в формуле (14) через $y_1 = f_1(x)$ обозначена функция, график которой ограничивает фигуру сверху).

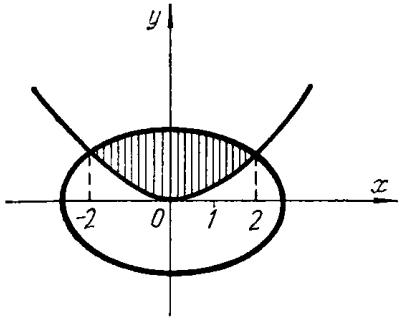


Рис. 65

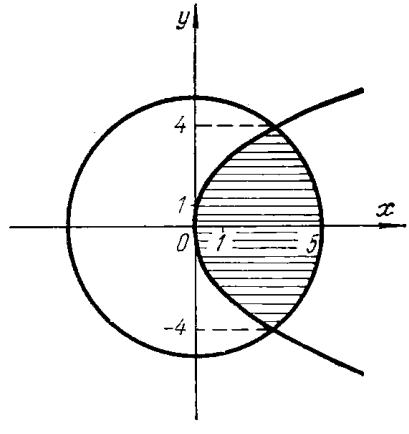


Рис. 66

Таким образом, искомая площадь

$$S = \int_{-2}^{2} \left(\frac{\sqrt{8 - x^2}}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \sqrt{8 - x^2}\, dx - \frac{1}{4} \int_{-2}^{2} x^2 dx.$$

Для вычисления первого интеграла применим подстановку $x = 2\sqrt{2}\sin t$; тогда $dx = 2\sqrt{2}\cos t dt$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$.

$$S_1 = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \sqrt{8 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{8 - 8\sin^2 t} \cdot 2\sqrt{2} \cos t dt =$$

$$= 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t)\, dt = 2\left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \pi + 2.$$

Поскольку

$$S_2 = \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{12}(8+8) = \frac{4}{3},$$

то $S = S_1 - S_2 = \pi + 2 - \frac{4}{3} = \pi + \frac{2}{3} \approx 3{,}81.$

Пример 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 25$, $16x - 3y^2 = 0$.

Эта фигура ограничена слева дугой параболы $16x - 3y^2 = 0$, справа дугой окружности $x^2 + y^2 = 25$ (рис. 66).

Площадь ее вычислим по формуле (16). Из системы уравнений $x^2 + y^2 = 25$, $16x - 3y^2 = 0$ находим $y_1 = -4$, $y_2 = 4$ — ординаты точек пересечения; следовательно, $c = -4$, $d = 4$. Разрешая данные уравнения относительно x, находим

$$x_1 = \varphi_1(y) = \sqrt{25 - y^2};\quad x_2 = \varphi_2(y) = \frac{3}{16}y^2$$

(в формуле (16) через $x_1 = \varphi_1(y)$ обозначена функция, график которой ограничивает фигуру справа).

Принимая во внимание симметрию фигуры относительно оси Ox, получаем формулу для вычисления ее площади:

$$S = \int_{-4}^{4}\left(\sqrt{25 - y^2} - \frac{3}{16}y^2\right)dy = 2\int_{0}^{4}\left(\sqrt{25 - y^2} - \frac{3}{16}y^2\right)dy.$$

Для вычисления первого интеграла применяем подстановку $y = 5\sin t$, откуда $dy = 5\cos t\,dt$, $\alpha = 0$, $\beta = \arcsin 0{,}8$.

$$S_1 = 2\int_{0}^{4}\sqrt{25 - y^2}\,dy = 2\int_{0}^{\beta}\sqrt{25 - 25\sin^2 t}\cdot 5\cos t\,dt =$$

$$= 2\int_{0}^{\beta} 5\cos t \cdot 5\cos t\,dt = 25\int_{0}^{\beta}(1 + \cos 2t)\,dt =$$

$$= 25\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_{0}^{\beta} = 25\left(\arcsin 0{,}8 + \frac{12}{25}\right) \approx 35{,}64.$$

Так как

$$S_2 = 2\int_{0}^{4}\frac{3}{16}y^2 dy = \frac{3}{8}\int_{0}^{4} y^2 dy = \frac{3}{8}\cdot\frac{y^3}{3}\Big|_{0}^{4} = 8,$$

то $S = S_1 - S_2 \approx 35{,}64 - 8 = 27{,}64$.

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями:

951. $x - 3y = 0$, $x - y = 0$, $x - 3 = 0$. **952.** $y - x^2 = 0$, $y - 4 = 0$.

953. $y = 9 - x^2$, $y = 0$. **954.** $x = 5 + 4y - y^2$, $x = 0$.

955. $y = e^x$, $x = -1$, $x = 0$. **956.** $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$, $x = 0$, $x = a$.

957. $y = x^2$, $y = x + 2$. **958.** $y = 2x - x^2$, $y = -x$.

959. $x^2 + y^2 = 25$, $16y - 3x^2 = 0$. **960.** $x^2 + 2y^2 = 6$, $x - 2y^2 = 0$.

961. $2y^2 - 3x^2 = 24$, $8y - 3x^2 = 0$. **962.** $3x^2 - y^2 = 12$, $9x - y^2 = 0$.

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

963. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (*астроида*).

964. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ (*эллипс*).

965. $r = a\cos\varphi + b$, $b \leqslant a$ (*улитка Паскаля*).

966. Одним витком спирали Архимеда $r = a\varphi$.

967. $x^2 + y^4 = y^2$. **968.** $a^2y^2 = x^3(2a - x)$.

Вычислить площади фигур, ограниченных петлей кривой:

969. $y^2(2a - x) = x(x - a)^2$ (*строфоида*).

970. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (*декартов лист*).

§ 42. Длина дуги кривой

Длина дуги кривой $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx \text{ или } l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx. \tag{17}$$

Длина дуги кривой, заданной параметрически

$$x = \varphi_1(t);\ y = \varphi_2(t)\ (t_1 \leqslant t \leqslant t_2),$$

определяется формулой

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt \text{ или } l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi_1'^2(t) + \varphi_2'^2(t)}\,dt. \tag{18}$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $r = r(\varphi)$, где $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,dr. \tag{19}$$

Пример 1. Вычислить длину дуги линии $y = \ln\sin x$ между точками, для которых $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Искомую длину вычисляем по формуле (17). Поскольку $y = \ln\sin x$, $y' = \frac{\cos x}{\sin x}$, то

$$l = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\cos t)}{\cos^2 t - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos t}{1+\cos t} \right| \Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \ln 3 \approx 0{,}5493.$$

Пример 2. Найти длину дуги линии $x = 4(\cos t + t \sin t)$, $y = 4(\sin t - t \cos t)$ $\left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.

Применяем формулу (18), полагая в ней $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$. Так как

$$x_t' = 4(-\sin t + \sin t + t \cos t) = 4t \cos t;$$

$$y_t' = 4(\cos t - \cos t + t \sin t) = 4t \sin t;$$

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{16t^2 \cos^2 t + 16t^2 \sin^2 t} = 4t,$$

то

$$l = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4t\,dt = 2t^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2} \approx 4{,}9348.$$

Пример 3. Найти длину всей линии, заданной уравнением в полярных координатах $r = 2(1 + \cos \varphi)$.

Принимая во внимание, что

$$r^2 = 4(1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi); \quad r' = -2\sin \varphi, \quad r'^2 = 4\sin^2 \varphi;$$

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \sqrt{4(1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) + 4\sin^2 \varphi} =$$

$$= 2\sqrt{2 + 2\cos \varphi} = 4\cos \frac{\varphi}{2},$$

в соответствии с формулой (19) находим

$$l = \int_{-\pi}^{\pi} 4\cos \frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8\sin \frac{\varphi}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 16.$$

Найти длину дуги кривой:

971. $y = \frac{x^2}{2} - 2$, отсеченной осью Ox.

972. $y = \ln \operatorname{cosec} x$ от $x = \frac{\pi}{2}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$.

973. $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ между прямыми $x = \pm a$.

974. $y = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 3$.

975. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$ от $t = 0$ до $t = \dfrac{\pi}{2}$.

Вычислить длину всей кривой:

976. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

977. $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

978. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

979. $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$

980. Найти длину петли кривой $x = t^2$, $y = t - \dfrac{1}{3}t^3$.

981. Вычислить длину дуги гиперболической спирали $r\varphi = 1$ от точки $A\left(2; \dfrac{1}{2}\right)$ до $B\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

982. Найти длину дуги логарифмической спирали $r = ae^{\varphi}$, находящейся внутри круга радиусом $r = a$.

§ 43. Объем тела вращения

Объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $AabB$ (рис. 67, *а*), где AB — дуга кривой $y = f(x)$, вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx$$

или

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \qquad (20)$$

Объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $CcdD$ (рис. 67, *б*), где CD — дуга кривой $x = \varphi(y)$, определяется формулой

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy$$

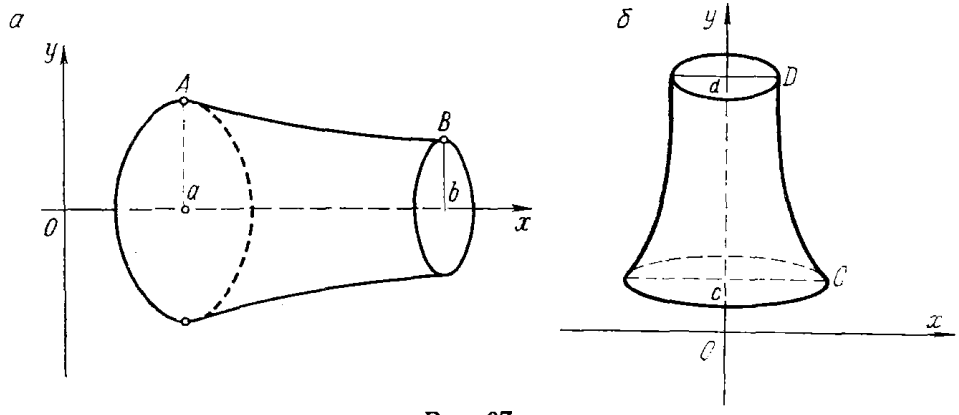


Рис. 67

или

$$V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\, dy. \tag{21}$$

Пример 1. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y^2 = 6x$, прямой $x = 2$ и осью Ox.

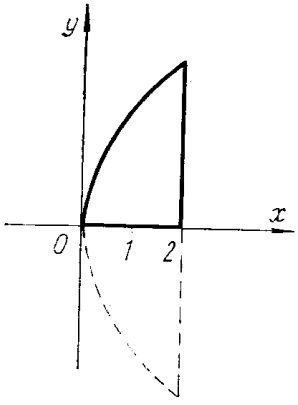


Рис. 68

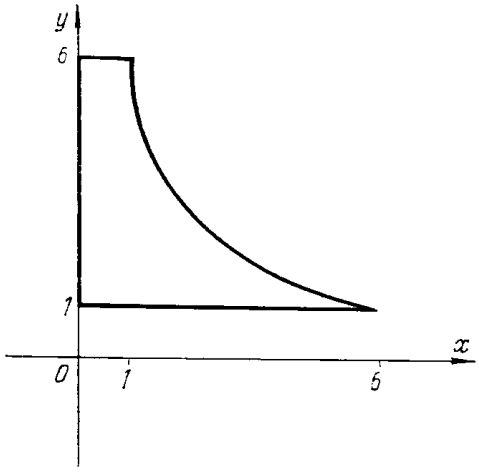


Рис. 69

В соответствии с условием задачи находим пределы интегрирования $a = 0$, $b = 2$ (рис. 68). По формуле (20) получаем

$$V_x = \pi \int_0^2 x^2 dy = \pi \int_0^2 6x dx = 3\pi x^2 \Big|_0^2 = 12\pi \approx 37{,}6992.$$

Пример 2. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной параболой $x^2 = 4y$, прямой $y = 4$ и осью Oy.

Замечая, что пределы интегрирования $c = 0$, $d = 4$, по формуле (21) находим

$$V_y = \pi \int_0^4 y^2 dx = \pi \int_0^4 4y dy = 2\pi y^2 \Big|_0^4 = 32\pi \approx 100{,}5312.$$

Пример 3. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy = 6$, прямыми $y = 1$, $y = 6$ и осью Oy (рис. 69).

Из уравнения кривой $xy = 6$ находим

$$x = \frac{6}{y}\ ;\ x^2 = \frac{36}{y^2}\ .$$

Принимая во внимание, что $c = 1$, $d = 6$, по формуле (21) получаем

$$V_y = \pi \int_1^6 \frac{36}{y^2} dy = 36\pi \int_1^6 \frac{dy}{y^2} = -\frac{36\pi}{y}\Big|_1^6 = -36\pi\left(\frac{1}{6} - 1\right) = 30\pi.$$

Пример 4. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной фигуры, ограниченной гиперболой $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и прямыми $x=\pm a$.

Применяем формулу (20). Выражение для y^2, входящее в эту формулу, определяется из уравнения гиперболы

$$\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{x^2}{a^2};\quad y^2=b^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Искомый объем

$$V_x=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}b^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi b^2\int_{-a}^{a}dx+$$

$$+\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}x^2dx=\pi b^2x\Big|_{-a}^{a}+\frac{\pi b^2}{a^2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-a}^{a}=\pi b^2[a-(-a)]+$$

$$+\frac{\pi b^2}{3a^2}[a^3-(-a)^3]=2\pi b^2a+\frac{\pi b^2}{3a^2}2a^3=2\pi b^2a+\frac{2\pi b^2a}{3}=\frac{8}{3}\pi ab^2.$$

Пример 5. Вычислить объем тела, полученного вращением эллипса $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ вокруг оси Ox (это тело называется *эллипсоидом вращения*, см. рис. 70).

Из уравнения эллипса находим выражение для y^2

$$y^2=b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}.$$

По формуле (20) получаем

$$V_x=\pi\int_{-a}^{a}\left(b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}\right)dx=\pi b^2\int_{-a}^{a}dx-\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}x^2dx=$$

$$=\pi b^2x\Big|_{-a}^{a}-\frac{\pi b^2}{a^2}\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-a}^{a}=\pi b^2[a-(-a)]-$$

$$-\frac{\pi b^2}{3a^2}[a^3-(-a)^3]=2\pi b^2a-\frac{2\pi b^2a}{3}=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

Следовательно, $V=\frac{4}{3}\pi ab^2$.

При $a=b=R$ получаем $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ (объем шара).

Пример 6. Найти объем тела, полученного вращением одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ вокруг оси Ox.

Движущаяся точка описывает одну арку циклоиды, когда t меняется от 0 до 2π (см. приложение 4), x при этом меняется от 0 до $2\pi a$.

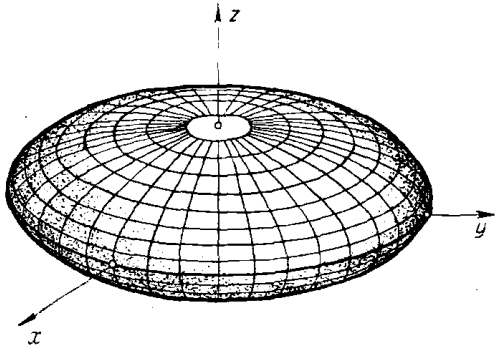


Рис. 70

Так как $x = a(t - \sin t)$, то $dx = a(t - \sin t)'_t dt = a(1 - \cos t)\,dt$.

Следовательно,

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 a (1 - \cos t)\,dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\,dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos t + 3\left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right) - (1 - \sin^2 t)\cos t\right] dt =$$

$$= \pi a^3 \left[\int_0^{2\pi} \frac{5}{2}\,dt - 4\int_0^{2\pi} \cos t\,dt + \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \cos 2t\,d(2t) + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,d(\sin t)\right] = \pi a^3 \left[\frac{5}{2}\,t\Big|_0^{2\pi} - 4\sin t\Big|_0^{2\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} + \frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{2\pi}\right] = \pi a^3 \frac{5}{2} \cdot 2\pi = 5\pi^2 a^3.$$

Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

983. $2y^2 = x^3$, $x = 4$. **984.** $y^2 = 2px$, $x = p$.

985. $y = \sin x$ (одной полуволной), $y = 0$. **986.** $y^2 + x^4 = x^2$.

987. $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$, $x = \pm a$, $y = 0$.

988. $x^2 - y^2 = a^2$, $x = \pm 2a$.

989. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. **990.** $x = t^3$, $y = t^2$, $x = \pm 1$.

Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

991. $y^3 = 4x^2$, $y = 2$. **992.** $x^2 + y^4 = y^2$.

993. $x^2 + y^2 = a^2$. **994.** $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

995. $y^2 = 4 - x$, $x = 0$. **996.** $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$.

997. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. **998.** $x = t$, $y = t^2$, $y = 4$.

§ 44. Приложения определенных интегралов к решению физических задач

Если точка движется по некоторой кривой и абсолютная величина ее скорости $v=f(t)$ есть известная функция времени t, то путь s, пройденный точкой за промежуток времени $[a; b]$,

$$s=\int_a^b f(t)\,dt. \tag{22}$$

Работа переменной силы $X=F(x)$, действующей в направлении оси Ox, на отрезке $[a; b]$ определяется формулой

$$A=\int_a^b F(x)\,dx. \tag{23}$$

Давление p жидкости удельного веса γ на вертикальную пластинку, погруженную в жидкость, вычисляется по формуле

$$p=\gamma\int_a^b xydy,$$

где $y=f(x)$ есть известная функция, зависящая от формы пластинки.

Пример 1. Скорость точки $v=0{,}1\,t^3$ м/с. Найти путь s, пройденный точкой за промежуток времени $T=10$ с, протекший от начала движения. Чему равна средняя скорость движения за этот промежуток?

По формуле (22) получаем

$$s=\int_0^{10}0{,}1t^3dt=0{,}1\frac{t^4}{4}\Big|_0^{10}=250\ (\text{м}).$$

Следовательно, $v_{ср}=\dfrac{s}{T}=25$ (м/с).

Пример 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,06 м, если сила 1Н растягивает на 0,01 м?

Согласно закону Гука, сила X Н, растягивающая пружину на x м, равна $X=kx$, где k — коэффициент пропорциональности. Полагая $x=0{,}01$ м и $X=1$Н, получаем $k=100$, следовательно, $X=kx=100x$. Искомую работу определяем по формуле (23)

$$A=\int_0^{0,06}100xdx=50x^2\Big|_0^{0,06}=$$

$$=0{,}18\ (\text{Дж}).$$

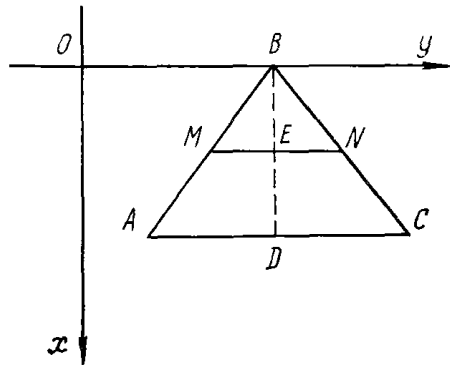


Рис. 71

Пример 3. Вычислить давление p воды на погруженную в нее вертикально пластинку, имеющую форму треугольника ABC с основанием $AC=b$ и высотой $BD=h$, предположив, что вершина B этого треугольника

лежит на свободной поверхности жидкости, а основание AC параллельно ей (рис. 71).

Пусть MN — ширина пластинки на уровне $BE = x$. Из подобия треугольников MBN и ABC находим

$$\frac{MN}{AC} = \frac{BE}{BD} \quad \text{или} \quad \frac{y}{b} = \frac{x}{h},$$

отсюда

$$y = \frac{bx}{h}.$$

На основании формулы (24) получаем

$$p = \gamma \int_0^h x \frac{bx}{h}\, dx = \frac{\gamma b}{h} \int_0^h x^2 dx = \frac{\gamma b}{h} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{\gamma b}{h} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{\gamma b h^2}{3}$$

Известно, что масса кубического метра воды равна 1000 кг. Следовательно, если b и h выражены в метрах, то $\gamma = 9{,}80665 \cdot 10^3$ Н,

$$p = 9{,}80665 \cdot 10^3 \frac{bh^2}{3}$$

999. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, без учета сопротивления воздуха определяется по формуле

$$v = v_0 - gt,$$

где t — протекшее время; g — ускорение силы тяжести. На каком расстоянии от начального положения будет находиться тело через t с после броска?

1000. Скорость движения точки $v = te^{-0{,}01}$ м/с. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

1001. Ракета поднимается вертикально вверх. Считая, что при постоянной силе тяги ускорение ракеты за счет уменьшения ее массы растет по закону $y = \dfrac{A}{a - bt}$ $(a - bt > 0)$, найти скорость в любой момент времени t, если начальная скорость равна нулю. Найти также высоту, достигнутую ракетой к моменту $t = t_1$.

1002. Вычислить, какую работу нужно затратить, чтобы выкачать воду из вертикальной цилиндрической бочки, имеющей радиус основания R и высоту H.

1003. Какую работу нужно затратить, чтобы тело массой m поднять с поверхности земли радиусом R на высоту h?

1004. Вычислить кинетическую энергию диска массой M и радиусом R, вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через центр диска перпендикулярно к его плоскости.

1005. Какую работу нужно затратить, чтобы остановить железный шар радиусом $R=2$ м, вращающийся с угловой скоростью $\omega=\frac{100}{3}\pi$ рад/с вокруг своего диаметра? (плотность железа $\gamma=7{,}8\cdot 10^3$ кг/м^3).

1006. Вертикальная плотина имеет форму трапеции. Вычислить давление воды на плотину, если известно, что верхнее основание плотины $a=80$ м, нижнее основание $b=50$ м, а высота $h=20$ м.

1007. Найти давление жидкости, плотность которой γ, на вертикальный эллипс с осями $2a$ и $2b$, центр которого погружен в жидкость на уровень h, причем большая ось $2a$ эллипса параллельна уровню жидкости ($h\geqslant b$).

Глава IX. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

При исследовании явлений природы часто выясняется, что одна переменная величина зависит от многих других переменных величин. Для изучения такой величины служит понятие функции нескольких переменных.

§ 45. Область определения, частные и полное приращения. Непрерывность функции нескольких переменных

Упорядоченную совокупность n действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют *точкой*, а сами числа — ее *координатами*. Запись $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ означает, что M имеет координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Множество всевозможных указанных точек называется *арифметическим (координатным) n-мерным пространством* и обозначается символом A^n.

Функция, определенная на некотором множестве X арифметического n-мерного пространства, называется *функцией n переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты точки $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ данного множества. В этом случае говорят также, что *задана функция точки M*, и пишут $y = f(M)$. Множество X называется *областью определения* функции $y = f(M)$, множество всех значений функции — *областью значений* функции.

Рассмотрим случаи $n=2$, $n=3$. Предположим, что X — некоторое множество точек плоскости; Y — подмножество действительных чисел. Так как в фиксированной декартовой прямоугольной системе координат Ox_1x_2 каждой точке $M(x_1; x_2)$ соответствует упорядоченная пара действительных чисел x_1, x_2 (ее координаты), то функция, заданная на указанном множестве X, является функцией двух переменных, т. е. $y = f(x_1, x_2)$, где x_1, x_2 — координаты точки $M(x_1; x_2)$. Если координаты точки M обозначить буквами x и y, а функцию — буквой z, то $z = f(x, y)$; переменные x и y при этом называются *аргументами* функции или *независимыми переменными*. Значение функции $z = f(x, y)$, которое она принимает при $x=a$, $y=b$, обозначается $f(a, b)$. Функциональная зависимость z от x, y может обозначаться и другими символами: $z = \varphi(x, y)$, $z = F(x, y)$, $z = z(x, y)$ и т. п.

Линией уровня функции

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

называется множество точек плоскости Oxy, в которых данная функция принимает одно и то же значение. Линии уровня функции (1) определяются уравнением

$$f(x, y) = C, \tag{2}$$

где C — произвольная постоянная.

Графиком функции $z = f(x, y)$ называется множество точек $N(x; y; f(x, y))$, т. е. некоторое множество точек пространства.

Функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $n=3$ является функцией трех переменных x_1, x_2, x_3. Обозначим эти переменные буквами x, y, z, а функцию — буквой u, тогда $u = f(x, y, z)$. Значение функции $u = f(x, y, z)$ при $x=a$, $y=b$,

$z=c$ обозначается $f(a, b, c)$. Областью определения функции трех переменных является некоторое множество точек пространства.

Поверхностью уровня функции $u=f(x, y, z)$ называется множество точек $M(x; y; z)$, в которых эта функция принимает одно и то же значение. Поверхности уровня функции $u=f(x, y, z)$ определяются уравнением

$$f(x, y, z)=C, \tag{3}$$

где C — произвольная постоянная.

Пусть точки $M(x; y)$, $M_1(x+\Delta x; y)$, $M_2(x; y+\Delta y)$, $M_3(x+\Delta x; y+\Delta y)$ принадлежат области определения функции $z=f(x, y)$. Частные приращения функции $z=f(x, y)$ в точке $M(x; y)$ определяются формулами

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x, y)-f(x, y); \tag{4}$$

$$\Delta_y z=f(x, y+\Delta y)-f(x, y), \tag{5}$$

а ее полное приращение — формулой

$$\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y). \tag{6}$$

Частные приращения, полное приращение функции трех переменных определяются *аналогично.*

Функция $z=f(x, y)$ называется *непрерывной* в точке $M_0(x_0; y_0)$, если: 1) функция определена в этой точке (т. е. при $x=x_0$ и $y=y_0$) и в любой точке $M(x+\Delta x; y+\Delta y)$, как угодно близкой к M_0;

2) полное приращение функции стремится к нулю, когда приращения аргументов стремятся к нулю (или $\Delta\rho\to 0$, где $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ — расстояние между точками M и M_0), т. е.

$$\lim_{\Delta\rho\to 0}\Delta z=0;\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(x+\Delta x, y+\Delta y-f(x, y)]=0. \tag{7}$$

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в этой области.*

Точкой разрыва функции $z=f(x, y)$ называется точка, в которой не выполняется условие (7). Нарушение условий непрерывности функции $z=f(x, y)$ может происходить как в отдельных точках, так и в точках, образующих одну или несколько линий *(линии разрыва).*

Пример 1. Найти область определения функции $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Поскольку для любых x и y подкоренное выражение неотрицательно, т. е. $x^2+y^2\geqslant 0$, то функция определена при всех x и y. Областью определения данной функции является вся плоскость Oxy. Поверхность, определяемая уравнением $z=\sqrt{x^2+y^2}$, изображена на рис. 72 (показана ее конечная часть; сверху поверхность не ограничена).

Пример 2. Найти область определения функции $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$.

Данная функция определена лишь в случае, когда подкоренное выражение неотрицательно, т. е.

$$16-x^2-y^2\geqslant 0 \text{ или } x^2+y^2\leqslant 16.$$

Последнему неравенству удовлетворяют координаты всех точек плоскости Oxy, которые лежат внутри и на границе круга радиусом $R=4$ с центром в начале координат. Следовательно, областью определения этой функции является круг радиусом $R=4$ с центром в начале координат (сама функция определяет полусферу радиусом $R=4$, расположенную над плоскостью Oxy).

Пример 3. Найти область определения функции $z=\dfrac{1}{\sqrt{36-4x^2-9y^2}}$

Функция определена, когда подкоренное выражение положительно (в отличие от предыдущего примера равенство нулю исключается), т. е.

$$36 - 4x^2 - 9y^2 > 0 \text{ или } 4x^2 + 9y^2 < 36.$$

Полученному неравенству удовлетворяют координаты точек, лежащих внутри эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (точки самого эллипса исключаются). Область определения функции — множество точек, лежащих внутри эллипса с полуосями $a = 3$, $b = 3$ и центром в начале координат.

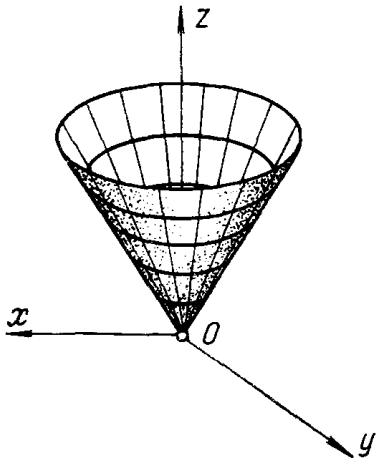


Рис. 72

Пример 4. Найти линии уровня функции $z = x^2 - y^2$.

В соответствии с формулой (2) линии уровня данной функции определяются уравнением

$$x^2 - y^2 = C.$$

Если $C \neq 0$, то линии уровня являются равносторонними гиперболами (с действительной осью Ox при $C > 0$; с мнимой осью Ox при $C < 0$). Если $C = 0$, то линии уровня являются прямыми, их уравнения $y = x$, $y = -x$.

Пример 5. Найти поверхности уровня функции $u = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2$.

В соответствии с формулой (3) поверхности уровня данной функции определяются уравнением

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = C.$$

Если $C > 0$, то поверхностями уровня являются сферы радиусом $R = \sqrt{C}$ с центром в точке S (1; —2; 3). При $C = 0$ уравнению удовлетворяют координаты единственной точки S.

Пример 6. Вычислить приращения функции $z = x^2 - xy + y^2$ при переходе от точки $M(2; 2)$ к точкам $M_1(2{,}1; 2)$, $M_2(2; 1{,}9)$, $M_3(2{,}1; 1{,}9)$.

При переходе от точки M к точке M_1 приращение получает только аргумент x, причем $\Delta x = 2{,}1 - 2 = 0{,}1$.

Принимая во внимание формулу (4), получаем выражение для частного приращения данной функции по x:

$$\Delta_x z = [(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)\, y + y^2] - (x^2 - xy + y^2) = \Delta x\,(2x - y + \Delta x).$$

Поскольку $x = 2$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}1$, то

$$\Delta_x z = 0{,}1\,(2 \cdot 2 - 2 + 0{,}1) = 0{,}21.$$

При переходе от точки M к точке M_2 приращение получает только аргумент y, причем $\Delta y = 1{,}9 - 2 = -0{,}1$.

В соответствии с формулой (5) находим выражение для частного приращения функции по y:

$$\Delta_y z = [x^2 - x\,(y + \Delta y) + (y + \Delta y)^2] - (x^2 - xy + y^2) = \Delta y\,(2y - x + \Delta y).$$

Подставив в эту формулу численные значения, получим

$$\Delta_y z = -0{,}1\,(2 \cdot 2 - 2 - 0{,}1) = -0{,}19.$$

При переходе от точки M к точке M_3 приращения получают оба аргумента. По формуле (6) находим выражение для полного приращения данной

функции:

$$\Delta z = [(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)(y+\Delta y) + (y+\Delta y)^2] - (x^2 - xy + y^2) =$$
$$= \Delta x\,(2x - y + \Delta x) + \Delta y\,(2y - x + \Delta y) - \Delta x \Delta y;$$
$$\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z - \Delta x \Delta y.$$

Так как в этом случае $x = 2$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = -0{,}1$, то

$$\Delta z = 0{,}21 + (-0{,}19) - 0{,}1\,(-0{,}1) = 0{,}03.$$

Найти области определения функций:

1008. $z = x^2 + 3xy + y^2$. **1009.** $z = \ln(x - y)$.

1010. $z = \dfrac{x}{x+y}$. **1011.** $z = \arcsin\dfrac{x}{3} + \arcsin\dfrac{y}{2}$.

1012. $z = \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}}$.

1013. $z = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 - 9)(36 - x^2 - y^2)}}$

Построить линии уровня функций:

1014. $z = 2x - 5y$. **1015.** $z = x^3 y$.

1016. $z = \dfrac{x}{y^2}$. **1017.** $z = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$.

Найти поверхности уровня функций трех переменных:

1018. 1) $u = 2x + 3y - 4z$; 2) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1019. 1) $u = x^2 + y^2 - 2z$; 2) $u = x^2 - y^2 + z^2$.

1020. Периметр треугольника равен $2p$. Выразить площадь S треугольника как функцию двух его сторон x и y. Определить и построить область возможных значений x и y.

1021. Выразить объем V правильной четырехугольной пирамиды как функцию ее высоты x и бокового ребра y.

1022. Дана функция $f(x, y) = \dfrac{3x + 2y}{2x + 3y}$. Вычислить $f(0, 1)$, $f(0, -1)$, $f(1, 0)$, $f(1, 1)$, $f(2, -2)$, $f(a, a)$, $f(a, -a)$.

1023. Дана функция $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Вычислить $f(-1, 0)$, $f(0\ 1)$, $f(2, 1)$, $f(-1, -2)$.

1024. Доказать, что для функции $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ выполняется равенство $f(tx, ty) = t^2 f(x, y)$, где t — любое действительное число.

1025. Доказать, что для функции $f(x, y) = x^3 + 3x^2y - 5xy^2 +$

$+y^3$ выполняется равенство $f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$, где t — любое действительное число.

1026. Найти $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, Δz для функции $z = xy$. Вычислить $\Delta_x z$, $\Delta_y z$, Δz при переходе от точки $M(1; 2)$ соответственно к точкам $M_1(1{,}1; 2)$, $M_2(1; 1{,}9)$, $M_3(1{,}1; 2{,}2)$.

1027. Найти частные и полное приращения функции $z = x^2 + xy - 2y^2$ при переходе от точки $M(2; 1)$ соответственно к точкам $M_1(2{,}2; 1)$, $M_2(2; 0{,}9)$, $M_3(2{,}2; 0{,}9)$.

1028. Доказать непрерывность функций: 1) $z = x + y$; 2) $z = x^2 - y^2$; 3) $z = \sqrt{xy}$; 4) $z = x^2 y$.

1029. Найти точки разрыва функций: 1) $z = \dfrac{x-1}{y+2}$; 2) $z = \dfrac{3}{x-y}$; 3) $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$; 4) $z = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(9 - x^2 - y^2)}}$.

§ 46. Частные производные и полный дифференциал функции нескольких переменных

Частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ частная производная по x и частная производная по y определяются соответственно формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

При нахождении частной производной пользуются правилами дифференцирования функции одной переменной, считая все другие аргументы постоянными.

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy.

Разность между полным приращением Δz и полным дифференциалом dz есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, т. е.

$$\Delta z - dz = \varepsilon\rho; \quad \varepsilon \to 0 \text{ при } \rho \to 0, \tag{8}$$

где

$$dz = A(x, y)\,\Delta x + B(x, y)\,\Delta y.$$

Функция, обладающая непрерывными частными производными, заведомо имеет полный дифференциал. Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т. е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy.$$

Функция, имеющая полный дифференциал, называется *дифференцируемой.*

Из формулы (8) следует, что $\Delta z \approx dz$ или

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,\ y)\approx \frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy,$$

откуда

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)\approx f(x,\ y)+\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy. \qquad (9)$$

Полный дифференциал функции трех переменных $u=f(x,\ y,\ z)$ находится по формуле

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}\,dx+\frac{\partial u}{\partial y}\,dy+\frac{\partial u}{\partial z}\,dz.$$

Частные производные функции нескольких переменных называют также *частными производными первого порядка* (или *первыми частными производными*).

Частными производными второго порядка (или *вторыми частными производными*) данной функции называются соответствующие частные производные от ее первых частных производных.

Для функции $z=f(x,\ y)$ по определению имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=[f'_x(x,\ y)]'_x=f''_{xx}(x,\ y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=[f'_y(x,\ y)]'_y=f''_{yy}(x,\ y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=[f'_x(x,\ y)]'_y=f''_{xy}(x,\ y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=[f'_y(x,\ y)]'_x=f''_{yx}(x,\ y).$$

Вторые частные производные обозначаются также символами z''_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}, z''_{yx}. Производные z''_{xy}, z''_{yx} называются *смешанными частными производными*. Если смешанные производные непрерывны, то они равны, т. е. $z''_{xy}=z''_{yx}$; результат дифференцирования в этом случае не зависит от порядка дифференцирования. При нахождении вторых частных производных пользуются обычными правилами дифференцирования (при этом считают постоянными все аргументы, кроме того, по которому находится частная производная).

Аналогично определяются и находятся частные производные третьего и высших порядков.

Пример 1. Найти частные производные функции $z=2x^3+3x^2y+6xy-y^3$.

Считая y постоянной и дифференцируя z как функцию x, находим частную производную по x:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(2x^3)'_x+(3x^2y)'_x+(6xy)'_x-(y^3)'_x=6x^2+6xy+6y-0=$$
$$=6(x^2+xy+y).$$

Считая x постоянной и дифференцируя z как функцию y, находим частную производную по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(2x^3)'_y+(3x^2y)'_y+(6xy)'_y-(y^3)'_y=0+3x^2+6x-3y^2=3(x^2+2x-y^2).$$

Пример 2. Найти частные производные функции $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Пользуясь правилами нахождения частных производных, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})'_x = \left[\frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2 + z^2)\right]'_x =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot 2x = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left[\frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2 + z^2)\right]'_y = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot 2y = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left[\frac{1}{2} \ln (x^2 + y^2 + z^2)\right]'_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot 2z = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Пример 3. Найти полный дифференциал функции $z = e^{xy}$. Поскольку $\frac{\partial u}{\partial x} = e^{xy} \cdot y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = e^{xy} \cdot x$, то $dz = e^{xy} \cdot ydx + e^{xy} \cdot xdy = e^{xy}(ydx + xdy)$.

Пример 4. Вычислить полный дифференциал функции $u = xyz$ при переходе от точки M (6; 4; 2) к точке N (5,92; 3,95; 2,07).

Так как $\frac{\partial u}{\partial x} = yz$, $\frac{\partial u}{\partial z} = xz$, $\frac{\partial u}{\partial z} = xy$, то $du = yzdx + xzdy + xydz$.

Подставив в эту формулу значения $x = 6$, $y = 4$, $z = 2$, $dx = \Delta x = 5{,}92 - 6 = -0{,}08$, $dy = \Delta y = 3{,}95 - 4 = -0{,}05$, $dz = \Delta z = 2{,}07 - 2 = 0{,}07$, получим

$$du = 4 \cdot 2(-0{,}08) + 6 \cdot 2(-0{,}05) + 6 \cdot 4 \cdot 0{,}07 = -0{,}64 - 0{,}6 + 1{,}68 = 0{,}44.$$

Пример 5. Как изменится диагональ прямоугольника со сторонами $a = 8$ см, $b = 6$ см, если его сторону a уменьшить на 3 мм, а сторону b увеличить на 7 мм?

Диагональ прямоугольника l через его стороны a и b выражается формулой $l = \sqrt{a^2 + b^2}$. Введем в рассмотрение функцию $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Поскольку $dz = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $x = 8$, $y = 6$, $\Delta x = -0{,}3$, $\Delta y = 0{,}7$, то

$$\Delta z \approx dz = \frac{8(-0{,}3) + 6 \cdot 0{,}7}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{-2{,}4 + 4{,}2}{\sqrt{64 + 36}} = \frac{1{,}8}{10} = 0{,}18.$$

Следовательно, диагональ увеличится на 0,18 см.

Пример 6. Вычислить приближенно $e^{(1,1)^2 - (0,9)^2}$.

Рассмотрим функцию $z = e^{x^2 - y^2}$. Искомое число можно считать приращенным значением этой функции при $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = -0{,}1$. Поскольку $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$; $f(1, 1) = e^0 = 1$; $\Delta z \approx dz = 2e^{x^2 - y^2}(xdx - ydy) = 2e^0 \times (0{,}1 + 0{,}1) = 2 \cdot 0{,}2 = 0{,}4$, то по формуле (9) получим

$$e^{(1,1)^2 - (0,9)^2} \approx e^{1-1} + \Delta z = 1 + 0{,}4 = 1{,}4.$$

Найти частные производные функций:

1030. $z = x^2y^2$. **1031.** $z = x^3y^2 + xy^3$. **1032.** $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

1033. $z = \frac{x + y}{x - y}$. **1034.** $z = e^{x^2 + y^2}$. **1035.** $z = x^y$.

Найти полные дифференциалы функций:

1036. $z=\dfrac{xy}{x+y}$. **1037.** $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$. **1038.** $\omega=r\sin 3\varphi$.

1039. $u=\dfrac{y}{x}e^z$. **1040.** $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

1041. $u=\dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}$.

Вычислить значения полных дифференциалов:

1042. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ при переходе от точки $M(3;\ 1)$ к точке $N(3{,}2;\ 1{,}4)$.

1043. $u=e^{x+y+z}$ при переходе от точки $M(1;\ 2;\ -3)$ к точке $N(1{,}1;\ 1{,}9;\ -3{,}15)$.

Подсчитать приближенно приращения функций:

1044. $z=\sqrt{x^2+y^2}$ при переходе от точки $M(12;\ 5)$ к $N(11{,}85;\ 5{,}10)$.

1045. $u=e^{xyz}$ при переходе от точки $M(0;\ 2;\ 3)$ к $N(0{,}2;\ 1{,}9;\ 3{,}1)$.

Подсчитать приближенно приращенные значения функций:

1046. $z=\ln(x^2+y^2)$ при переходе от точки $M(1;\ 0)$ к $N(1{,}15;\ 0{,}25)$.

1047. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ при переходе от точки $M(1;\ -2{,}2)$ к $N(0{,}9;\ -2{,}1;\ 1{,}9)$.

1048. Вычислить приближенно: 1) $1{,}02^{3{,}01}$; 2) $\sqrt{(3{,}85)^2+(2{,}95)^2}$; 3) $\sqrt{(1{,}9)^2+(9{,}8)^2+(11{,}1)^2}$; 4) $e^{(2{,}01)^2-(1{,}98)^2}$; 5) $\ln\sqrt{(1{,}01)^2+\cdots+(2{,}15)^2+(1{,}85)^2}$; 6) $(1{,}1)^2\cdot(1{,}9)^3\cdot(2{,}8)^2$; 7) $(1{,}12)^3\cdot(3{,}15)^2\times(0{,}98)^3$; 8) $1{,}002\cdot(1{,}997)^2\cdot(3{,}003)^3$.

1049. Как изменится диагональ прямоугольного параллелепипеда с измерениями $a=11$ см, $b=10$ см, $c=2$ см, если его стороны a и b уменьшить на 2 мм, а сторону c увеличить на 3 мм?

1050. Найти частные производные второго порядка от функций 1) $z=x^3y^2$; 2) $z=x^3+4x^2y-6xy^2+y^3$; 3) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$; 4) $z=\dfrac{x+y}{xy}$; 5) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{1-xy}{x+y}$; 6) $z=\arccos\dfrac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}$.

1051. Показать, что $z''_{xy}=z''_{yx}$ следующих функций: 1) $z=\cos(2x-3y)$; 2) $z=e^{xy}$; 3) $z=\cos^2x+\cos^2y$; 4) $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; 5) $z=\ln(x^2+y^2)$; 6) $z=x^2y^3+x^2y^4$.

1052. Найти указанные частные производные от заданных функций: 1) $z=x^3y+x^2y^3$, $\dfrac{\partial^3z}{\partial x^3}$, $\dfrac{\partial^3z}{\partial x\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^3z}{\partial x^2\partial y}$, $\dfrac{\partial^3z}{\partial y^3}$; 2) $z=x^4-$

$-3xy^3+2x^3y+y^4$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$; 3) $u=e^{xyz}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^2\partial x}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}$; 4) $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial z^3}$; 5) $u=\cos(x+2y-3z+t)$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial z\partial t}$; 6) $u=xy\sin 2t+x^2z^5$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial t}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial z}$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial z^2}$, $\dfrac{\partial^5 u}{\partial z^5}$.

§ 47. Экстремум функции нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции

Максимумом функции двух переменных $z=f(x, y)$ называется такое ее значение $f(x_1, y_1)$, которое больше всех других значений, принимаемых функцией в точках, достаточно близких к точке $M_1(x_1; y_1)$ и отличных от нее:

$$f(x_1, y_1) > f(x, y).$$

Минимумом функции двух переменных $u=f(x, y)$ называется такое ее значение $f(x_2, y_2)$, которое меньше всех других значений, принимаемых функцией в точках, достаточно близких к точке $M_2(x_2; y_2)$ и отличных от нее:

$$f(x_2, y_2) < f(x, y).$$

Аналогично определяются максимум и минимум функции трех переменных.

Максимум и минимум функции нескольких переменных называется *экстремумом*. Точка, в которой достигается экстремум, называется *точкой экстремума*.

Необходимый признак экстремума. В точке экстремума дифференцируемой функции ее частные производные первого порядка равны нулю.

Если $M(x_0; y_0)$ — точка экстремума дифференцируемой функции $z=f(x, y)$, то

$$f'_x(x_0, y_0)=0;\ f'_y(x_0, y_0)=0. \tag{10}$$

Точки, в которых частные производные первого порядка обращаются в нуль, называются *критическими точками*.

Достаточный признак экстремума. Пусть $z=f(x, y)$ — функция, для которой существуют производные первого и второго порядка. Обозначим значения частных производных второго порядка в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$A=f''_{xx}(x_0, y_0),\ B=f''_{xy}(x_0, y_0),\ C=f''_{yy}(x_0, y_0)$$

и составим выражение

$$\Delta=AC-B^2.$$

Если $\Delta>0$, то $M_0(x_0; y_0)$ — точка экстремума, а именно: точка максимума при $A<0$ (или $C<0$), точка минимума при $A>0$ (или $C>0$).

Если $\Delta<0$, то в точке M_0 нет экстремума.

Функция, непрерывная в ограниченной замкнутой области, достигает в ней наибольшего и наименьшего значения или в критических точках или в точках, лежащих на границе области.

Пример 1. Найти экстремум функции $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 17$.

Находим частные производные первого и второго порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y) = 2x - 4; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y) = 2y + 6;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x, y) = 2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Приравнивая нулю частные производные первого порядка, получаем систему уравнений вида (10) для определения критических точек:

$$2x - 4 = 0; \; 2y + 6 = 0.$$

Из этой системы находим $x = 2$, $y = -3$, получаем критическую точку $M_0(2; -3)$.

Частные производные второго порядка в данном случае постоянны, причем $A = 2$, $B = 0$, $C = 2$, поэтому

$$\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - 0 = 4.$$

Поскольку $\Delta > 0$ и $A > 0$, то $M_0(2; -3)$ — точка минимума. Вычисляем значение минимума: $z_{\min} = \min f(x, y) = f(2, -3) = 2^2 + (-3)^2 - 4 \cdot 2 + 6(-3) + 17 = 4$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 6x + 2y + 12$ в области, определяемой неравенствами $-4 \leqslant x \leqslant 4$, $-2 \leqslant y \leqslant 2$.

Частные производные первого порядка $f'_x(x, y) = 2x - 6$; $f'_y(x, y) = 2y + 2$ обращаются в нуль при $x = 3$, $y = -1$.

Частные производные второго порядка постоянны:

$$f''_{xx}(x, y) = 2; \quad f''_{xy}(x, y) = 0; \quad f''_{yy}(x, y) = 2.$$

Так как $\Delta = AC - B^2 > 0$, $A = 2 > 0$, то $M(3; -1)$ — точка минимума, причем $\min f(x, y) = f(3, -1) = 3^2 + (-1)^2 - 6 \cdot 3 + 2(-1) + 12 = 2$.

Точка $M(3; -1)$ лежит внутри данной области, ограниченной прямоугольником с вершинами в точках $A(-4; -2)$, $B(-4; 2)$, $C(4; 2)$, $D(4; -2)$.

Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, необходимо еще исследовать ее изменение на границе области, т. е. на сторонах AB, BC, CD, AD данного прямоугольника.

На стороне AB $x = -4$, поэтому данная функция обращается в функцию одной переменной y:

$$z = z(y) = (-4)^2 + y^2 - 6(-4) + 2y + 12 = y^2 + 2y + 52.$$

Исследуем эту функцию на отрезке $-2 \leqslant y \leqslant 2$:

$$z'_y = 2y + 2; \; 2y + 2 = 0; \; y = -1; \; z'' = 2 > 0.$$

$y = -1$ — точка минимума, $\min z(y) = y(-1) = (-1)^2 + 2(-1) + 52 = 51$; на границах отрезка $z(-2) = 4 - 4 + 52 = 52$, $z(2) = 4 + 4 + 52 = 60$ (это значение функции в точках A и B).

На отрезке BC $y = 2$, поэтому

$$z = z(x) = x^2 + 2^2 - 6x + 2 \cdot 2 + 12 = x^2 - 6x + 20;$$

$$z'(x) = 2x - 6; \; 2x - 6 = 0; \; x = 3; \; z''(x) = 2 > 0.$$

$x = 3$ — точка минимума, $\min z(x) = z(3) = 9 - 18 + 20 = 11$.

На отрезке CD $x = 4$, поэтому

$$z = z(y) = 16 + y^2 - 24 + 2y + 12 = y^2 + 2y + 4;$$

$$z'(y) = 2y + 2;\ 2y + 2 = 0;\ y = -1;\ z'' = 2 > 0.$$

$y = -1$ — точка минимума, $\min z(y) = z(-1) = 1 - 2 + 4 = 3$; значения функции в точках C и D

$$z(-2) = 4 - 4 + 4 = 4;\ z(2) = 12.$$

На отрезке AD $y = -2$, поэтому

$$z = z(x) = x^2 + 4 - 6x - 4 + 12 = x^2 - 6x + 12;$$

$$z'(x) = 2x - 6;\ 2x - 6 = 0;\ x = 3;\ z'' = 2 > 0.$$

$x = 3$ — точка минимума, $\min z(x) = z(3) = 9 - 18 + 12 = 3$.

Рассматривая все полученные значения функции, заключаем, что в данной области наибольшее значение функции равно 60 (достигается в граничной точке B), наименьшее значение равно 2 (достигается в точке экстремума M).

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4$ в круге $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

Данная функция имеет минимум в точке $M(1;\ 1)$, лежащей в заданной области, причем $\min f(x,\ y) = f(1,\ 1) = 2$.

Исследуем изменение функции на границе области, т. е. на окружности $x^2 + y^2 = 4$. Воспользуемся параметрическими уравнениями этой окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ $(0 \leqslant t < 2\pi)$.

На окружности данная функция становится функцией одной переменной t;

$$z = z(t) = 4\cos^2 t + 4\sin^2 t - 4\cos t - 4\sin t + 4 = 8 - 4\cos t - 4\sin t.$$

Поскольку

$$z'(t) = 4\sin t - 4\cos t;\ 4\sin t - 4\cos t = 0;\ \operatorname{tg} t = 1;\ t_1 = \frac{\pi}{4};$$

$$t_2 = \frac{5}{4}\pi;\ z''(t) = 4\cos t + 4\sin t;\ z''(t_1) > 0;$$

$$z''(t_2) < 0,$$

то t_1 — точка минимума, t_2 — точка максимума, причем

$$\min z(t) = z\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2{,}344;\quad \max z(t) = 8 + 4\sqrt{2} \approx 13{,}656.$$

Рассматривая полученные экстремальные значения функции, заключаем, что в указанном круге наибольшее значение функции равно $8 + 4 + \sqrt{2} \approx 13{,}656$; достигается оно в точке $N(-\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$, лежащей на границе окружности; наименьшее значение функции равно 2, достигается в точке минимума $M(1;\ 1)$.

Найти экстремумы функций:

1053. $z = (x - 5)^2 + (y + 6)^2$. **1054.** $z = (x + 8)^2 + (y - 9)^2$.

1055. $z = (x + 1) + (y + 2)^2 + 3$. **1056.** $z = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + 5$.

1057. $z = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$. **1058.** $z = x^2 + y^2 + 4x + 8y + 21$.

1059. $z = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$. **1060.** $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функций в заданных областях:

1061. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$. **1062.** $z = xy$, $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

1063. $z = x^2 - y^2$, $-3 \leqslant x \leqslant 3$, $-3 \leqslant y \leqslant 3$.

1064. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 9$. **1065.** $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 16$.

1066. $z = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 5$, $-2 \leqslant x \leqslant 2$, $-3 \leqslant y \leqslant 3$.

1067. $z = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 8$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 4$.

1068. Найти наибольшее значение произведения $u = xyz$ неотрицательных чисел x, y, z при условии, что сумма их является постоянной, равной $3C$.

1069. Найти наименьшее значение суммы $u = x + y + z$ положительных чисел при условии, что произведение их является постоянным, равным C^3.

1070. Среди всех треугольников с заданным периметром $2p$ найти тот, площадь которого наибольшая.

§ 48. Определение параметров эмпирических формул по способу наименьших квадратов

В естествознании, в частности в физических, химических, биологических и других науках, при обработке результатов наблюдений часто встречаются со следующей задачей. В итоге опыта получен ряд значений переменных x и y, однако характер функциональной зависимости между ними остается неизвестным; по полученным данным требуется найти аналитическое выражение зависимости между x и y. Формулы, полученные при решении подобного рода задач, называются *эмпирическими*. *Способ наименьших квадратов* — один из наилучших методов определения параметров эмпирических формул.

Пусть в результате измерения двух зависимых величин x и y получены следующие данные:

x	x_1	x_2	. . .	x_n
y	y_1	y_2	. . .	y_n

Если между x и y существует приближенная линейная зависимость, т. е. $y = ax + b$, то коэффициенты a и b этой эмпирической формулы, при которых сумма квадратов погрешностей

$$\varepsilon_k = y_k - ax_k - b \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

будет наименьшей, определяются системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} a\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + b\sum_{k=1}^{n} x_k &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k; \\ a\sum_{k=1}^{n} x_k + bn &= \sum_{k=1}^{n} y_k. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Пример 1. Результаты измерений величин x и y определяются следующей таблицей:

x	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00
y	2,10	2,20	2,70	2,80	2,85

Установить зависимость между этими величинами и определить параметры эмпирической формулы способом наименьших квадратов.

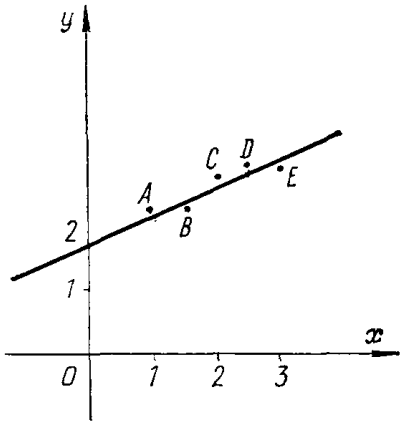


Рис. 73

Будем считать, что соответствующие пары значений (x_k, y_k), где $k=1, 2, 3, 4, 5$, являются прямоугольными декартовыми координатами точек плоскости. Построим точки A (1; 2,1), B (1,5; 2,2), C (2; 2,7), D (2,5; 2,8), E (3; 2,85) относительно прямоугольной декартовой системы координат (рис. 73). Из чертежа видно, что эти точки расположены приближенно на некоторой прямой линии, уравнение которой может быть записано в виде $y=ax+b$. Следовательно, можно предположить, что между величинами y и x существует линейная зависимость $y=ax+b$, где a и b пока неизвестны. Способом наименьших квадратов определим параметры a и b, использовав нормальную систему уравнений (11). Чтобы применить эту систему, необходимо подсчитать входящие в нее коэффициенты для данного случая.

Результаты измерений x, y и итоги их обработки занесем в табл. 6.

Таблица 6

k	x_k	y_k	x_k^2	$x_k y_k$
1	1,00	2,10	1,00	2,10
2	1,50	2,20	2,25	3,30
3	2,00	2,70	4,00	5,40
4	2,50	2,80	6,25	7,00
5	3,00	2,85	9,00	8,55
Σ	10,00	12,65	22,50	26,35

В последней строке табл. 6 получены коэффициенты системы уравнений (11), которая принимает вид

$$\left.\begin{aligned} 22{,}50a + 10{,}00b &= 26{,}35; \\ 10{,}00a + 5{,}00b &= 12{,}65. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, находим $a=0{,}42$, $b=1{,}69$. Следовательно, зависимость между величинами x и y выражается приближенной формулой

$$y = 0{,}42x + 1{,}69.$$

Замечание. В последующих примерах подобного рода решение будет ограничиваться определением параметров эмпирической формулы. Предварительная проверка вида функциональной зависимости предоставляется читателю (путем изображения на чертеже соответствующих точек $M_k(x_k; y_k)$ и выяснения, на какой примерно линии располагаются построенные точки).

Пример 2. Даны результаты измерений величин x и y:

x	10	20	30	40	50	60
y	150	100	40	0	—60	—100

Способом наименьших квадратов определить параметры эмпирической формулы в случае линейной зависимости.

Результаты измерений x и y и итоги обработки их занесем в табл. 7.

Таблица 7

k	x_k	y_k	x_k^2	$x_k y_k$
1	10	150	100	1500
2	20	100	400	2000
3	30	40	900	1200
4	40	0	1600	0
5	50	—60	2500	—3000
6	60	—100	3600	—6000
Σ	210	130	9100	—4300

Система уравнений (11) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} 9100a + 210b &= -4300; \\ 210a + 6b &= 130 \end{aligned}\right\} \text{ или } \left.\begin{aligned} 91a + 2{,}1b &= -43; \\ 105a + 3b &= 65. \end{aligned}\right\}$$

Умножая второе уравнение на 0,7 и вычитая найденное уравнение из первого, получаем $17{,}5a = -88{,}5$, откуда $a = -5{,}06$. При данном значении a находим $b = 198{,}77$.

Следовательно, $y = 198{,}77 - 5{,}06x$.

Пример 3. Параболу $y = x^2$ на отрезке $2 \leqslant x \leqslant 4$ приближенно заменить прямой $y_0 = kx + b$ так, чтобы была наименьшей средняя квадратичная ошибка:

$$\omega = \int_2^4 (y - y_0)^2\, dx$$

Подставляя выражения для y и y_0 в подынтегральную функцию и интегрируя, получаем

$$\int_2^4 (y - y_0)^2\, dx = \int_2^4 (x^2 - kx - b)^2\, dx = \int_2^4 (x^4 + k^2x^2 + b^2 -$$

$$-2kx^3-2bx^2+2kbx)\,dx=\int_2^4 x^4dx+k^2\int_2^4 x^2+b^2\int_2^4 dx-$$

$$-2k\int_2^4 x^3dx-2b\int_2^4 x^2dx+2kb\int_2^4 xdx=$$

$$=\frac{x^5}{5}\Big|_2^4+k^2\,\frac{x^3}{3}\Big|_2^4+b^2x\Big|_2^4-2k\,\frac{x^4}{4}\Big|_2^4-2b\,\frac{x^3}{3}\Big|_2^4+2kb\,\frac{x^2}{2}\Big|_2^4=$$

$$=\frac{1}{5}\,(1024-32)+\frac{k^2}{3}\,(64-8)+b^2\,(4-2)-$$

$$-\frac{k}{2}\,(256-16)-\frac{2b}{3}\,(64-8)+kb\,(16-4).$$

Таким образом, ω является функцией двух переменных k и b

$$\omega\,(k,\ b)=\frac{992}{5}+\frac{56}{3}\,k^2+2b^2-120k-\frac{112}{3}\,b+12bk.$$

Подберем числа k и b так, чтобы функция ω получила возможно меньшее значение. Для этого необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$\frac{\partial\omega}{\partial k}=0;\quad \frac{\partial\omega}{\partial b}=0.$$

Находя частные производные и приравнивая их нулю, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{112}{3}\,k-120+12b=0;\\ 4b-\frac{112}{3}+12k=0,\end{aligned}\right\}$$

откуда $k=6,\ b=-\frac{26}{3}$.

Следовательно, $y_0=6x-\frac{26}{3}$; $x^2\approx 6x-\frac{26}{3}$.

Пример 4. Произведены измерения двух величин x и y, в результате которых найдено n взаимно соответствующих значений:

x	x_1	x_2	. . .	x_n
y	y_1	y_2	. . .	y_n

Предположив, что между x и y существует зависимость $y=ax$, найти ее с помощью способа наименьших квадратов.

Для решения задачи необходимо определить число a. Первая строка таблицы приводит к набору чисел

$$z_i=ax_i\ (i=1,\ 2,\ldots,\ n),$$

вообще говоря, не совпадающих с числами y_i. Число a выберем так, чтобы сумма квадратов погрешностей

$$u(a) = \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i - y_i)^2$$

была наименьшей. Для этого необходимо, чтобы

$$\frac{du}{da} = 0 \text{ или } 2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i - y_i)\, x_i = 0.$$

Последнее уравнение можно переписать так:

$$a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

откуда

$$a = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 . \qquad (I)$$

Пример 5. Способом наименьших квадратов найти зависимость $y = ax$ между величинами x и y по результатам измерений:

x	2	4	6	8	10
y	4,5	8,5	13	17	21

Применяя формулу (I) примера 4 для определения параметра a, получаем:

$$a = \frac{9 + 34 + 78 + 136 + 210}{4 + 16 + 36 + 64 + 100} = \frac{467}{220} \approx 2{,}12.$$

Следовательно, искомая зависимость выражается формулой $y = 2{,}12x$.

Пример 6. В результате измерений двух величин x и y получена следующая таблица их значений:

x	x_1	x_2	. . .	x_n
y	y_1	y_2	. . .	y_n

Предположив, что между x и y существует зависимость $y = ax^2 + b$, найти ее с помощью способа наименьших квадратов.

Первая строка таблицы приводит к набору чисел

$$z_i = ax_i^2 + b \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Было бы идеальным выбрать параметры a и b так, чтобы при всех i оказалось $z_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Однако при $n > 2$ этого обычно сделать не удается, так как значения a и b, найденные из уравнений $y_1 = ax_1^2 + b$, $y_2 = ax_2^2 + b$, как правило, не будут удовлетворять уравнениям

$$y_3 = ax_3^2 + b, \ldots, \; y_n = ax_n^2 + b.$$

Параметры a и b выберем так, чтобы сумма квадратов погрешностей

$$u(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + b - y_i)^2$$

была наименьшей. Для этого необходимо, чтобы $\frac{\partial u}{\partial a} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial b} = 0$, т. е.

$$2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + b - y_i) x_i^2 = 0;$$

$$2 \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + b - y_i) = 0.$$

Последние уравнения перепишем так:

$$\left.\begin{aligned} a \sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2 \\ a \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + nb &= \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned}\right\} \qquad (I)$$

Эти уравнения называются *нормальными*. Они определяют искомые коэффициенты a и b.

Пример 7. Найти коэффициенты a и b в случае зависимости $y = ax^2 + b$ по результатам измерений:

x	1	2	3	4	5
y	1	3	6	10	15

Результаты измерений и итоги их обработки занесем в табл. 8.

Система нормальных уравнений (I) примера 6 в данном случае принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} 979a + 55b &= 602; \\ 55a + 5b &= 35. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, находим $a = 0{,}58$, $b = 0{,}62$.

Таким образом, искомая зависимость определяется формулой $y = 0{,}58x^2 + 0{,}62$.

Таблица 8

i	x_i	x_i^2	x_i^4	y_i	$y_i x_i^2$
1	1	1	1	1	1
2	2	4	16	3	12
3	3	9	81	6	54
4	4	16	256	10	160
5	5	25	625	15	375
Σ	15	55	979	35	602

Предположив, что между y и x существует зависимость $y=ax$, найти ее с помощью способа наименьших квадратов по результатам измерений:

1071.

x	1	2	3	4	5	6
y	2,2	4,5	6,7	9	11	13,5

1072.

x	—2	—1	0	1	2	3
y	—6,4	—3	0	3	6,4	9,1

1073.

x	—3	—2	—1	0	1	2
y	—12,1	—8,1	—4	0	4	8,1

1074.

x	10	20	30	40	50
y	—21	—42,5	—64	—85	—106

1075.

x	10	20	30	40	50
y	−7,5	−1,5	−20	−30	−37

1076.

x	2	4	6	8	10
y	2,5	5	7,5	10	13

1077.

x	1	3	5	7	9
y	2,5	7,4	12,3	17	22

1078.

x	10	20	30	40	50	60
y	3	7	11	12	17	21

С помощью способа наименьших квадратов найти параметры эмпирической формулы $y=ax+b$ по результатам измерений:

1079.

x	−1	−2	0	1	2	3
y	2,8	2,3	3,6	4	4,7	5

1080.

x	−10	−20	0	10	20	30
y	28	47,5	8	−11,5	−31,5	−51

1081.

x	2	4	5	6	8
y	−1	5	8,5	12	18

1082.

x	0	1	2	3	4
y	-2	-6	$-10{,}5$	$-14{,}5$	-19

1083.

x	1	2	3	4	5
y	2,9	6,1	9,2	11,8	16

1084.

x	-2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

1085.

x	1	2	3	4	5	6
y	2	4,9	7,9	11,1	14,1	17

1086.

x	0,2	0,5	0,7	0,9	1,3	1,5
y	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,2

Найти коэффициенты a и b в случае зависимости $y=ax^2+b$ по результатам измерений:

1087.

x	1	2	3	4	5
y	1	3	7	12	19

1088.

x	1	2	3	4	5
y	1	1,5	3	5	6

1089.

x	1	2	3	4	5
y	1	6	13	24	37

1090.

x	1	2	3	4	5
y	2	8	24	43	68

1091.

x	1	2	3	4	5
y	0	−2	−6	−11	−18

1092.

x	1	2	3	4	5
y	−1	−1,5	−2	−3	−4,5

С помощью способа наименьших квадратов составить нормальные уравнения для определения параметров a, b в случае зависимостей:

1093. $y = ax^3 + b$. **1094.** $y = a\cos 2x + b\sin 2x$.

С помощью способа наименьших квадратов составить систему уравнений для определения параметров a, b, c указанных эмпирических формул:

1095. $y = ax^2 + bx + c$. **1096.** $y = a\cos x + b\sin x + c$.

Определить a, b, c в случае зависимости $y = ax^2 + bx + c$ по результатам измерений:

1097.

x	1	2	3	4	5
y	2,9	8,9	19,1	33,2	50,8

1098.

x	1	2	3	4	6
y	1,5	3	5	7	10

1099. Кривую $y = x^3$ в промежутке $[-1; 1]$ приближенно заменить прямой $y_0 = kx + b$, чтобы средняя квадратичная ошибка $\omega = \int_{-1} (y - y_0)^2 dx$ была наименьшей.

1100. Кривую $y = -x^2$ в промежутке $[-4; -2]$ приближенно заменить прямой $y_0 = kx + b$, чтобы средняя квадратичная ошибка $\int_{-4}^{-2} (y - y_0)^2 dx$ была наименьшей.

Глава X. РЯДЫ

Рядом называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots, \qquad (1)$$

где $\{u_n\}$ — последовательность чисел или функций; u_1, u_2, u_3, ... — *члены ряда.* Если все члены ряда — числа, то ряд называется *числовым,* если члены ряда — функции, то *функциональным.*

Сумма n первых членов числового ряда (1) называется его n-й *частичной суммой:*

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

Если существует конечный предел частичных сумм

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n,$$

то он называется *суммой ряда,* а ряд в этом случае — *сходящимся.* Если предел частичных сумм не существует или бесконечен, то ряд называется *расходящимся.*

Остатком ряда после n-го члена (или *n-м остатком*) называется ряд, полученный из данного отбрасыванием его первых членов. Ряд и любой его остаток одновременно сходятся или расходятся.

Для сходящегося ряда (1), имеющего сумму S, употребляется запись $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Сумму n-го остатка ряда (1) обозначим r_n, т. е. $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, тогда

$$S = S_n + r_n; \quad \lim_{n \to \infty} r_n = 0.$$

Если ряд (1) — функциональный, т. е. $u_n = f_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, то для каждого фиксированного значения x_0 аргумента x соответствующий числовой ряд $f_1(x_0) + f_2(x_0) + \ldots$ или сходится, или расходится. Соответственно этому число x_0 называется *точкой сходимости* или *точкой расходимости* данного функционального ряда. Множество всех точек сходимости функционального ряда называется *областью* его *сходимости.*

Ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется *знакопеременным.*

Знакочередующимся называется ряд вида

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots + (-1)^{n-1} v_n + \ldots,$$

где $v_n > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$), т. е. ряд, у которого любые рядом стоящие члены имеют противоположные знаки.

§ 49. Числовые ряды

Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд сходится, то его общий член u_n при неограниченном возрастании номера n стремится к нулю, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Если общий член ряда к нулю не стремится, то ряд расходится.

Если сходится ряд, полученный из данного ряда путем отбрасывания нескольких его первых членов, то сходится и сам данный ряд.

Признак сравнения рядов. Пусть даны два ряда с положительными членами:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots; \tag{2}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \tag{3}$$

а) Если члены ряда (2) не превышают соответствующих членов ряда (3), т. е. $u_k \leqslant v_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и ряд (3) сходится, то сходится и ряд (2);

б) если члены ряда (2) не меньше соответствующих членов ряда (3), т. е. $u_k \geqslant v_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, и ряд (3) расходится, то расходится и ряд (2).

Признак сходимости Д'Аламбера. Если в ряде с положительными членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

отношение $(n+1)$-го члена к n-му при $n \to \infty$ имеет предел l, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$

то: а) ряд сходится в случае $l < 1$; б) ряд расходится в случае $l > 1$.

Знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{4}$$

сходится, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \ldots, \tag{5}$$

составленный из модулей его членов.

Ряд (4) называется в этом случае *абсолютно сходящимся*. Если ряд (4) сходится, а ряд (5) расходится, то ряд (4) называется *условно сходящимся*.

Признак сходимости Лейбница. Если модули членов знакочередующегося ряда

$$v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots, \quad v_n > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

монотонно убывают, т. е. $v_1 \geqslant v_2 \geqslant v_3 \geqslant \ldots$, и n-й член его при неограниченном возрастании n стремится к нулю, то ряд сходится.

Замечание. Погрешность при вычислении суммы сходящегося знакочередующегося ряда, удовлетворяющего условиям признака Лейбница, по абсолютной величине не превышает первого отброшенного члена, т. е. $|r_n| \leqslant v_{n+1}$.

Пример 1. Показать, что ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

является сходящимся.

Составим n-ю частную сумму ряда и преобразуем ее, приняв во внимание, что $\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Имеем

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Следовательно, ряд сходится и его сумма равна 1.

Пример 2. Исследовать, при каких значениях q сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots$$

Члены этого ряда образуют геометрическую прогрессию с первым членом a и знаменателем q. Будем кратко называть этот ряд *геометрической прогрессией* или *геометрическим рядом.*

Поскольку

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}; \quad qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n;$$

$$S_n - qS_n = a - aq^n; \quad S_n(1-q) = a(1-q^n),$$

то при $q \neq 1$

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}.$$

1. Если $|q| < 1$, то $q^n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q}.$$

Таким образом, при $|q| < 1$ данный ряд сходится и его сумма

$$S = \frac{a}{1-q}.$$

2. Если $|q| > 1$, то $|q|^n \to \infty$ при $n \to \infty$; тогда ряд расходится.

3. Если $q = 1$, то ряд принимает вид

$$a + a + a + \ldots$$

В этом случае

$$S_n = na, \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

т. е. ряд расходится.

4. При $q = -1$ имеем ряд

$$a - a + a - a + \ldots,$$

для которого

$$S_n = \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном;} \\ a & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Следовательно, S_n предела не имеет, ряд расходится.

Замечание. В случаях 2—4 общий член ряда не стремится к нулю при $n\to\infty$, поэтому ряд расходится.

Итак, *геометрический ряд сходится тогда и только тогда, когда знаменатель прогрессии по модулю меньше единицы.*

Пример 3. Показать, что гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

расходится.

Имеем очевидное неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n}=n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Если, отбросив первые два члена, остальные члены гармонического ряда последовательно разбить на группы по 2, 4, 8, ..., 2^{k-1} членов в каждой:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4};\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8};\ \frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16};$$

$$\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^k},$$

то при $n=2^k$ для частной суммы получаем следующее неравенство:

$$S_{2^k}>k\cdot\frac{1}{2},$$

из которого вытекает, что предел ее не может быть равен конечному числу (так как при $k\to\infty$ S_{2^k} неограниченно возрастает). Следовательно, гармонический ряд расходится.

Пример 4. Ряд

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

расходится, так как его члены (начиная со второго) больше соответствующих членов расходящегося гармонического ряда (см. признак сравнения рядов).

Пример 5. Ряд

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$$

сходится, так как его члены меньше соответствующих членов сходящегося ряда

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,$$

представляющего собой, если не принимать во внимание первого члена, геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{2}$ (см. признак сравнения рядов). Геометрическая прогрессия сходится при $|q|<1$ (см. пример 2).

Пример 6. С помощью признака Д'Аламбера исследовать, сходится ли ряд

$$1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ldots n}+\ldots$$

В данном случае

$$u_n=\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}=\frac{1}{n!};\quad u_{n+1}=\frac{1}{1\cdot 2\ldots n\,(n+1)}=\frac{1}{(n+1)!};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1.$$

Следовательно, ряд сходится.

Пример 7. Исследовать, сходится ли ряд

$$\frac{2^1}{1}+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$$

На основании признака Д'Аламбера получаем

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{n+1}:\frac{2^n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2\frac{n}{n+1}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=2\cdot 1=2.$$

Так как $l>1$, то ряд расходится.

Пример 8. Знакопеременный ряд

$$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}-\ldots$$

сходится, так как сходящимся является ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$$

(Последний ряд — геометрическая прогрессия со знаменателем $q=\frac{1}{3}$.)

Замечание. Исходный ряд примера 8 не является знакочередующимся.

Пример 9. Знакочередующийся ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots$$

является сходящимся, так как его члены убывают по абсолютной величине и общий член

$$u_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

стремится к нулю при $n\to\infty$.

Замечание. Ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, является расходящимся (гармонический ряд). По определению исходный ряд называется условно сходящимся.

Найти формулу для общего члена ряда:

1101. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$

1102. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^3}+\ldots$

1103. $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots$ **1104.** $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots$

1105. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ **1106.** $1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\ldots$

Написать пять первых членов ряда по данному общему члену:

1107. $u_n=\frac{1}{n^2}$. **1108.** $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

1109. $u_n=\frac{n}{2^n}$. **1110.** $u_n=\frac{n!}{n^n}$.

1111. $u_n=\frac{x^n}{n}$. **1112.** $u_n=(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

1113. $u_n=\frac{x^{2n}}{2n}$. **1114.** $u_n=(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{2n}$.

Пользуясь необходимым признаком и признаком сравнения, исследовать, сходятся ли ряды:

1115. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$ **1116.** $1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots$

1117. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\ldots$

1118. $\frac{2}{1}+\frac{4}{2}+\frac{8}{3}+\frac{16}{4}+\frac{32}{5}+\ldots$

1119. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$

1120. $1+\frac{1}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{9\sqrt{3}}+\ldots$

С помощью признака Д'Аламбера исследовать, сходятся ли ряды:

1121. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^3}+\ldots$ **1122.** $1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots$

1123. $\frac{1}{2}+\frac{9}{4}+\frac{25}{8}+\frac{49}{16}+\frac{81}{32}+\ldots$

1124. $\frac{2}{100}+\frac{2^2}{200}+\frac{2^3}{300}+\ldots$

1125. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}+\ldots$

1126. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}+\ldots$

Исследовать сходимость знакочередующихся рядов:

1127. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots$

1128. $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\ldots$

1129. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\ldots$

1130. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\ldots$

Сколько первых членов надо взять в рядах, чтобы сумма их отличалась не более чем на $\frac{1}{10^6}$ от суммы соответствующего ряда:

1131. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}-\ldots$

1132. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\ldots$

§ 50. Степенные ряды

Степенным называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad (6)$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \ldots, \qquad (7)$$

где a, a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — числа.

Радиусом сходимости степенного ряда (6) называется число R такое, что при $|x|<R$ ряд сходится, а при $|x|>R$ ряд расходится. При $|x|=R$, т. е. при $x=-R$ и $x=R$, ряд может либо сходиться, либо расходиться. Интервал $]-R; R[$ называется *интервалом сходимости*.

Если ряд (6) сходится в единственной точке, то считают $R=0$; если ряд сходится при любом x, то полагают $R=\infty$.

Аналогично определяются радиус и интервал сходимости для ряда (7).

Степенной ряд (6) сходится, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, т. е. ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|x|^n = |a_0| + |a_1|\,|x| + |a_2|\,|x|^2 + \ldots \qquad (8)$$

Радиус сходимости рядов (6) и (8) определяется формулой

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad (9)$$

Степенной ряд в его интервале сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать.

Степенные ряды находят широкое применение в приближенных вычислениях и для аналитического представления функций.

Ряд Тейлора для функции $f(x)$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots \qquad (10)$$

В частном случае, при $a = 0$ получаем ряд Маклорена:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$$

Разложения в ряды некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots (-\infty < x < \infty). \qquad (11)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots (-\infty < x < +\infty).$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots (-\infty < x < +\infty).$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots (-1 < x < 1). \qquad (12)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots (-1 < x \leqslant 1).$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Пример 1. Найти интервал сходимости ряда

$$-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+\ldots$$

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда

$$|x|+\frac{|x|^2}{2}+\frac{|x|^3}{3}+\frac{|x|^4}{4}+\ldots,$$

для которого $u_n=\dfrac{|x|^n}{n}$, $a_n=\dfrac{1}{n}$, $u_{n+1}=\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}$, $a_n=\dfrac{1}{n+1}$.

По формуле (9) получаем

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}:\frac{1}{n+1}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=1.$$

Итак, интервал $]-1;\ 1[$ является интервалом сходимости данного ряда. Исследуем сходимость ряда на концах промежутка $]-1;\ 1[$.

При $x=-1$ получаем гармонический ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots,$$

он расходится (см. пример 3 § 49). При $x=1$ получаем знакочередующийся ряд

$$-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\ldots,$$

который в силу признака Лейбница сходится.

Следовательно, исходный ряд сходится в промежутке $-1<x\leqslant 1$.

Пример 2. Найти интервал сходимости ряда

$$1!\,x+2!\,x^2+3!\,x^3+\ldots+n!\,x^n+\ldots$$

В данном случае $a_n=n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, $a_{n+1}=(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\,(n+1)$.

По формуле (9) находим

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Итак, радиус сходимости равен нулю, ряд сходится в единственной точке $x=0$.

Пример 3. Найти интервал сходимости ряда

$$\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Так как $a_n=\dfrac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{(n+1)!}$, то

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n!}:\frac{1}{(n+1)!}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Следовательно, ряд сходится в промежутке $]-\infty;+\infty[$, т. е. на всей действительной оси.

Пример 4. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x+1}{1\cdot 2}+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x+1)^3}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

Обозначив общий член ряда через u_n, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{|x+1|^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}:\frac{|x+1|^n}{n\cdot 2^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{|x+1|}{2}\cdot\frac{n}{n+1}\right)=\frac{|x+1|}{2}.$$

На основании признака Д'Аламбера заключаем, что ряд сходится и притом абсолютно, если $\frac{|x+1|}{2}<1$, т. е. при $-3<x<1$; ряд расходится, если $\frac{|x+1|}{2}>1$, т. е. при $-\infty<x<-3$ и $1<x<\infty$.

При $x=1$ получаем расходящийся гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$, а при $x=-3$ — ряд $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots$, который (в силу признака Лейбница) сходится (неабсолютно). Следовательно, областью сходимости данного ряда является промежуток $-3\leqslant x<1$.

Пример 5. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)=\frac{1}{x}$ в окрестности точки $x=1$.

Находим производные: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$; $f''(x)=\frac{1\cdot 2}{x^3}$; $f'''(x)=-\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4}$; $f^{IV}(x)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{x^5}$;...

При $x=1$ получаем: $f(1)=\frac{1}{1}=1$; $f'(1)=-1$; $f''(1)=1\cdot 2$; $f'''(1)=-1\cdot 2\cdot 3$; $f^{IV}(1)=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$;...

Подставляя эти значения в формулу (10), будем иметь

$$\frac{1}{x}=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\ldots,\quad \frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n.$$

Полученный ряд сходится при $0<x<2$ (ряд является геометрической прогрессией со знаменателем $q=-(x-1)$ и сходится при $|q|<1$, т. е. при $|x-1|<1$).

Замечание. Этот пример можно решить другим способом:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}=1-(x-1)+(x-1)^2-(x-1)^3+\ldots$$

Пример 6. С точностью до 0,0001 вычислить $\int_0^1 e^{-x^2}dx$.

Первообразная для e^{-x^2} не является элементарной функцией (интеграл принадлежит к числу «неберущихся»).

Для вычисления интеграла разложим подынтегральную функцию в ряд, заменяя в разложении $y=e^x$ [см. формулу (11)] x на $-x^2$:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots$$

Интегрируя обе части этого равенства в пределах от 0 до 1, получаем

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \frac{x^9}{4!9} - \frac{x^{11}}{5!11} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^{13}}{6!13} - \frac{x^{15}}{7!15} + \ldots\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} +$$

$$+ \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75600} + \ldots$$

Так как вычисление ведется с точностью до 0,0001, то восьмой член и все последующие можно отбросить (см. замечание к признаку Лейбница). Ограничиваясь первыми семью членами, находим

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 0{,}7468.$$

Найти области сходимости рядов:

1133. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$

1134. $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

1135. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$

1136. $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$

1137. $1 + (x-2) + (x-2)^2 + \ldots$ **1138.** $1 + (x+3) + (x+3)^2 + \ldots$

Разложить в ряд Маклорена следующие функции и определить области сходимости:

1139. 1) $f(x) = \sin(x + \alpha)$; 2) $f(x) = \cos 2x$.

1140. 1) $f(x) = e^{x^2}$; 2) $f(x) = e^{-x}$.

1141. 1) $f(x) = a^x\ (a > 0)$; 2) $f(x) = a^{2x}$.

1142. 1) $f(x) = \sqrt{a + x}$; 2) $f(x) = \sqrt{1 + x}$.

1143. 1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{a + x}}$; 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x}}$.

1144. 1) $f(x) = \sqrt{a + x^2}$; 2) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

1145. 1) $f(x) = \sqrt{a^2 + x}$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{a^3 + x}$.

1146. 1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Разложить в ряд Тейлора следующие функции:

1147. $f(x)=x^4+2x^3-5x^2+2x+4$ по степеням $x+3$.

1148. $f(x)=x^5-7x^4+6x^3-10x^2+4x+16$ по степеням $x-1$.

1149. $f(x)=e^x$ в окрестности точки $x=-4$.

1150. $f(x)=\sqrt{x}$ в окрестности точки $x=4$.

1151. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ по степеням $x-3$.

1152. $f(x)=\sqrt{x^3}$ в окрестности точки $x=1$.

1153. Сколько нужно взять членов ряда

$$\sin 1=1-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\ldots,$$

чтобы вычислить $\sin 1$ с точностью до 0,001?

1154. Сколько нужно взять членов ряда

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-$$

$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots\ (|x|<1),$$

чтобы вычислить $\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\sqrt{1+\dfrac{1}{2}}$ с точностью до 0,01?

1155. Вычислить $\sqrt[3]{26}$ с точностью до 0,01.

1156. Вычислить $\sqrt{17}$ с точностью до 0,001.

1157. Вычислить $\sqrt{41}$ с точностью до 0,0001.

1158. Вычислить $\sqrt[3]{65}$ с точностью до 0,001.

1159. С точностью до 0,001 вычислить $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt[5]{1+x^2}}$

1160. С точностью до 0,0001 вычислить $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

Глава XI. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальные уравнения — большая и важная область современной математики. Они широко используются при решении разнообразных задач науки и техники. Следует отметить, что во многих случаях различные явления описываются одними и теми же дифференциальными уравнениями.

§ 51. Основные понятия

Дифференциальным называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y=f(x)$ и ее производные различных порядков.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Дифференциальное уравнение n-го порядка в общем виде записывается так:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0. \tag{1}$$

Решением дифференциального уравнения называется любая функция $y=f(x)$, обращающая это уравнение в тождество.

Решение может быть задано в неявном виде $F(x,\ y)=0$. В этом случае его называют *интегралом дифференциального уравнения.*

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой.*

Общим решением дифференциального уравнения (1) называется функция

$$y=\varphi(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n), \tag{2}$$

зависящая от x и n *произвольных независимых постоянных* $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$, обращающая это уравнение в тождество.

Общее решение, заданное в неявном виде

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n)=0,$$

называется *общим интегралом.*

Частным решением дифференциального уравнения (1) называется решение, которое получается из общего (2), если придать определенные значения произвольным постоянным, т. е. решение вида

$$y=\varphi(x,\ C_1^0,\ C_2^0,\ \ldots,\ C_n^0),$$

где $C_1^0,\ C_2^0,\ \ldots,\ C_n^0$ — фиксированные числа.

Частным интегралом называется интеграл, полученный из общего путем фиксирования произвольных постоянных:

$$\Phi(x,\ y,\ C_1^0,\ C_2^0,\ \ldots,\ C_n^0)=0,$$

где $C_1^0,\ C_2^0,\ \ldots,\ C_n^0$ — числа.

Пример 1. Показать, что функция $y=\sin x$ является решением дифференциального уравнения $y^{IV}-y=0$.

Найдем четвертую производную данной функции:

$$y' = \cos x;\ y'' = -\sin x;\ y''' = -\cos x;\ y^{IV} = \sin x.$$

Подставляя выражения для y и y^{IV} в данное дифференциальное уравнение, получаем тождество

$$\sin x - \sin x \equiv 0.$$

Это и означает, что функция $y = \sin x$ есть решение данного дифференциального уравнения (решение является частным, так как функция не содержит произвольных постоянных).

Пример 2. Показать, что функция $y = C_2e^{-4x} + e^{-3x} + 2x^2 - x - 1$ удовлетворяет уравнению $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15$. Является ли это решение общим?

Находим первую и вторую производные данной функции:

$$y' = -4C_2e^{-4x} - 3e^{-3x} + 4x - 1;\ y'' = 16C_2e^{-4x} + 9e^{-3x} + 4.$$

Подставляем выражения для y, y' и y'' в исходное уравнение:

$$16C_2e^{-4x} + 9e^{-3x} + 4 + 7(-4C_2e^{-4x} - 3e^{-3x} + 4x - 1) +$$

$$+ 12(C_2e^{-4x} + e^{-3x} + 2x^2 - x - 1) = (16C_2 - 28C_2 + 12C_2)e^{-4x} +$$

$$+ (9 - 21 + 12)e^{-3x} + 24x^2 + (28 - 12)x + (4 - 7 - 12) \equiv 24x^2 + 16x - 15.$$

Так как получено тождество, то данная функция есть решение указанного дифференциального уравнения. Это решение не является общим, ибо оно содержит только одну произвольную постоянную, а порядок уравнения равен двум.

Пример 3. Показать, что функция $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-x} - 2x - 3$ является общим решением дифференциального уравнения $y'' - 3y' - 4y = 8x + 18$.

Находим производные данной функции:

$$y' = 4C_1e^{4x} - C_2e^{-x} - 2;\ y'' = 16C_1e^{4x} + C_2e^{-x}$$

и подставляем выражения для y, y', y'' в исходное уравнение:

$$(16C_1e^{4x} + C_2e^{-x}) - 3(4C_1e^{4x} - C_2e^{-x} - 2) - 4(C_1e^{4x} + C_2e^{-x} - 2x - 3) =$$

$$= (16C_1 - 12C_1 - 4C_1)e^{4x} + (C_2 + 3C_2 - 4C_2)e^{-x} + 6 + 8x + 12 \equiv 8x + 18.$$

Поскольку данная функция содержит две независимые произвольные постоянные и обращает дифференциальное уравнение второго порядка в тождество, то она и является его общим решением.

Пример 4. Дано общее решение $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$ дифференциального уравнения $y'' - y = 0$. Какие частные решения получаются при $C_1 = 4$, $C_2 = -3$? При каких значениях параметров C_1 и C_2 получаются частные решения $y = e^x$, $y = 2e^{-x}$?

Подставляя значения $C_1 = 4$ и $C_2 = -3$ в формулу для общего решения, получаем частное решение $y = 4e^x - 3e^{-x}$.

Частное решение $y = e^x$ получается из общего при $C_1 = 1$, $C_2 = 0$; частное решение $y = 2e^{-x}$ — при $C_1 = 0$, $C_2 = 2$.

Пример 5. Показать, что функция $x^2 + y^2 - 2Cx = 0$ является общим интегралом дифференциального уравнения $2xyy' = y^2 - x^2$. Что представляет собой частный интеграл при $C = 1$?

Дифференцируя данную функцию по x, получаем:

$$2x + 2yy' - 2C = 0;\ x + yy' - C = 0;\ y' = \frac{C - x}{y}.$$

Из уравнения $x^2 + y^2 - 2Cx = 0$ находим C и подставляем его выражени в формулу для y':

$$y'=\frac{C-x}{y}=\frac{\frac{x^2+y^2}{2x}-x}{y}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{2xy}=\frac{y^2-x^2}{2xy}.$$

Подстановка производной в дифференциальное уравнение приводит к тождеству

$$2xy\ \frac{y^2-x^2}{2xy}\equiv y^2-x^2.$$

Следовательно, неявная функция $x^2+y^2-2Cx=0$, зависящая от одной произвольной постоянной, является общим интегралом данного уравнения.

При $C=1$ получаем частный интеграл $x^2+y^2-2x=0$. Преобразуя левую часть уравнения, получаем

$$(x^2-2x+1)+y^2-1=0;\ (x-1)^2+y^2=1.$$

Это уравнение определяет окружность радиусом $R=1$ с центром в точке $C(1;\ 0)$.

1161. Определить порядок каждого из дифференциальных уравнений: 1) $x^2y'-(x^3-5x^2+4x+3)=0$; 2) $y''+5y'-6y=0$; 3) $y''+3xy'-7xy=x^2y^2$; 4) $y'''+3y''+3y'+y=0$; 5) $y^{IV}-81y'=0$; 6) $y^{IV}-5y'''+6y'=0$.

1162. Показать, что функция $y=-2xe^{-2x}$ является решением дифференциального уравнения $y''-y-6y=10e^{-2x}$.

1163. Показать, что функция $y^2-x^2-y=0$ является интегралом дифференциального уравнения $y'(x^2+y^2)-2xy=0$.

1164. Показать, что функция $y=C_1e^{-x}+e^{2x}(C_2\cos 3x+C_3\sin 3x)$ является общим решением дифференциального уравнения $y'''-3y''+9y'+13y=0$.

1165. Показать, что функция $x^2+y^2-2Cy=0$ является общим интегралом дифференциального уравнения $y'(y^2-x^2)-2xy=0$.

1166. Дано общее решение $y=(x-C)^2$ дифференциального уравнения $y'-2\sqrt{y}=0$. Построить частные решения при значениях C: 1) $C=-2$; 2) $C=-1$; 3) $C=0$; 4) $C=2$; 5) $C=3$.

1167. Дан общий интеграл $x^2+y^2-2Cx=0$ дифференциального уравнения $2xyy'-y^2+x^2=0$. Построить частные интегралы при значениях C: 1) $C=-1$; 2) $C=-2$; 3) $C=2$; 4) $C=4$; 5) $C=6$.

В задачах 1168—1172 показать, что данные функции удовлетворяют указанным дифференциальным уравнениям; установить, какими решениями они являются, общими или частными.

1168. $y=C(x+1)+4$, $y'(x+1)=y-4$.

1169. $x^2+4y^2=4$, $4yy'+x=0$.

1170. $y=3x\cos 3x$, $y''+9y+18\cos 3x=0$.

1171. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x^3$, $y''+9y=9x^3+6x$.

1172. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}$, $y'''-2y''-y'+2y=0$.

Найти дифференциальное уравнение, общим решением которого является данная функция:

1173. $y=Ce^{-x}$.

1174. $y=C_1e^{-x}+C_2e^x$.

1175. $y=C_1\sin 4x+C_2\cos 4x$.

1176. $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$.

§ 52. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Общий вид *дифференциального уравнения первого порядка*

$$F(x,\ y,\ y')=0. \tag{3}$$

Если это уравнение разрешимо относительно y', то

$$y'=f(x,\ y) \text{ или } dy=f(x,\ y)\,dx. \tag{4}$$

Уравнение (4) можно записать так:

$$P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=0.$$

Общим решением уравнения (3) называется функция

$$y=f(x,\ C) \tag{5}$$

от x и произвольной постоянной C, обращающая это уравнение в тождество.

Общее решение, заданное в неявном виде

$$\Phi(x,\ y,\ C)=0, \tag{6}$$

называется *общим интегралом.*

Геометрически общее решение (и общий интеграл) представляет собой семейство интегральных кривых на плоскости, зависящих от одного параметра C.

Частным решением уравнения (3) называется решение, полученное из общего решения (5) при фиксированном значении C:

$$y=f(x,\ C_0),$$

где C_0 — число.

Частным интегралом уравнения (3) называется интеграл, полученный из общего интеграла (6) при фиксированном значении C:

$$\Phi(x,\ y,\ C_0)=0.$$

Задача Коши. Найти решение $y=f(x)$ дифференциального уравнения (3), удовлетворяющее заданному начальному условию: $y=y_0$ при $x=x_0$. Другими словами: найти интегральную кривую уравнения (3), проходящую через данную точку $M_0(x_0;\ y_0)$.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение

$$X(x)\,Y(y)\,dx+X_1(x)\,Y_1(y)\,dy=0, \tag{7}$$

где $X(x)$, $X_1(x)$ — функции только от x; $Y(y)$, $Y_1(y)$ — функции только от y.

Уравнение (7) делением на произведение $Y(y)X_1(x)$ приводится к *уравнению с разделенными переменными*

$$\frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx+\frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy=0. \tag{8}$$

Общий интеграл уравнения (8):

$$\int\frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx+\int\frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy=C.$$

Замечание. При делении на произведение $X_1(x)Y(y)$ можно потерять те решения уравнения (7), которые обращают это произведение в нуль.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что функция $x=a$, где a — корень уравнения $X_1(x)=0$, т. е. $X_1(a)=0$, является решением уравнения (7). Функция $y=b$, где b — корень уравнения $Y_1(y)=0$, т. е. $Y_1(b)=0$, также является решением уравнения (7).

Решения $x=a$ и $y=b$, если они имеются, геометрически представляют собой прямые линии, соответственно параллельные оси Oy и оси Ox.

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y'=-\dfrac{1-x}{2+y}$

Найти решение, удовлетворяющее условию: $y=1$ при $x=5$.

Это уравнение можно представить в виде

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-x}{2+y} \text{ или } (x-1)\,dx+(y+2)\,dy=0;$$

оно является уравнением с разделенными переменными (коэффициент при dx — функция только от x, при dy — функция только от y).

Интегрируя, получаем

$$\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(y+2)^2}{2}=C_1 \text{ или } (x-1)^2+(y+2)^2=C^2,\ C^2=2C_1.$$

Общий интеграл данного уравнения геометрически представляет семейство концентрических окружностей с центром в точке $S(1;\ -2)$. Найдем решение, удовлетворяющее указанному условию. Подставив в выражение для общего интеграла значения $x=5$, $y=1$, определим C:

$$(5-1)^2+(1+2)^2=C^2,\ C^2=25.$$

Следовательно, искомое частное решение имеет вид $(x-1)^2+(y+2)^2=25$, оно определяет окружность, проходящую через точку $M(5;\ 1)$.

Пример 2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $dr+r\operatorname{ctg}\varphi d\varphi=0$.

В данном уравнении искомая функция обозначена буквой r, ее аргумент — буквой φ.

Разделяя переменные, получаем уравнение

$$\frac{dr}{r}+\operatorname{ctg}\varphi d\varphi=0 \text{ или } \frac{dr}{r}+\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi=0.$$

Интегрируя, находим

$$\ln|r|+\ln|\sin\varphi|=\ln|C|,$$

откуда $r\sin\varphi=C$. Геометрически это есть семейство прямых $y=C$.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения, найти решения, удовлетворяющие поставленным начальным условиям и построить их графики:

1177. $(y-3)\,dx-(x+2)\,dy=0$, $y=3$ при $x=-2$.

1178. $(x+3)\,dx+(y-5)\,dy=0$, $y=-1$ при $x=5$.

1179. $(x+1)\,dx+2(y-1)\,dy=0$, $y=1$ при $x=1$.

1180. $(x-2)\,dx-4(y+1)\,dy=0$, $y=-1$ при $x=6$.

1181. $(x+3)\,dy+(y-6)\,dx=0$, $y=8$ при $x=3$.

1182. $dy-2(x+1)\,dx=0$, $y=6$ при $x=2$.

1183. $(y-1)\,dy-3dx=0$, $y=2$ при $x=-1$.

1184. $xdy-(y-2)\,dx=0$, $y=3$ при $x=1$.

1185. $dy-(y-1)\,dx=0$, $y=2$ при $x=0$.

1186. $xdy-y\ln y dx=0$, $y=e$ при $x=1$.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

1187. $(7+3\cos^3 x)\,dx-\cos^2 x\,dy=0$.
1188. $6dx+(9-x^2)\,dy=0$.
1189. $x^2dx-(x^2+1)\,dy=0$.
1190. $x^2dx-(1+x)^8\,dy=0$.
1191. $dx-(4x^2+8x+13)\,dy=0$.
1192. $dx-(9x^2-18x+13)\times\times dy=0$.
1193. $dx-\sqrt{x^2+6x+8}\,dy=0$.
1194. $\sqrt{12+4x-x^2}dx-dy=0$.
1195. $(x^4+5)\,dx-(x^2+1)\,dy=0$.
1196. $(x^2+6x-5)\,dx-(x-1)^3\,dy=0$.
1197. $(x+xy^2)\,dx+(y-x^2y)\,dy=0$.
1198. $xy\,(1+x^2)\,dy-(1+y^2)\,dx=0$.
1199. $dr-r\operatorname{tg}\varphi d\varphi=0$.
1200. $\varphi^2dr+ad\varphi=0$.

§ 53. Однородные дифференциальные уравнения. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение

$$P(x,\ y)\,dx+Q(x,\ y)\,dy=0 \tag{9}$$

называется *однородным*, если коэффициенты $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ при dx и dy являются *однородными* функциями одной и той же степени n, т. е. функциями, для которых при любых k выполняются тождества

$$P(kx,\ ky)\equiv k^nP(x,\ y),\ \ Q(kx,\ ky)\equiv k^nQ(x,\ y). \tag{10}$$

Однородное уравнение с помощью подстановки

$$y=ux, \tag{11}$$

где u — новая неизвестная функция, приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Дифференциальное уравнение называется *линейным*, если оно содержит искомую функцию y и ее производную y' в первой степени и не содержит их произведений, т. е. если оно имеет вид

$$a(x)\,y'+b(x)\,y+c(x)=0,\ \ a(x)\not\equiv 0$$

или

$$y'+p(x)\,y=f(x). \tag{12}$$

Решение линейного уравнения ищется в виде

$$y=uv,$$

где u, v — функции от x. Подстановка выражений для y и y' в уравнение (12) приводит его к виду

$$v\,\frac{du}{dx}+\left[\frac{dv}{dx}+p(x)\,v\right]u=f(x).$$

В качестве v выбирают одну из функций, удовлетворяющих уравнению

$$\frac{dv}{dx}+p(x)\,v=0.$$

Тогда функция u определяется из уравнения

$$v\,\frac{du}{dx}=f(x).$$

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $(2x^2-y^2)\,dx+2xydy=0$.

Это уравнение вида (9), где $P(x,\ y)=2x^2-y^2$; $Q(x,\ y)=2xy$.

Поскольку

$$P(kx,\ ky)=2(kx)^2-(ky)^2=k^2(2x^2-y^2)\equiv k^2P(x,\ y);$$

$$Q(kx,\ ky)=2(kx)(ky)=k^2\,2xy\equiv k^2Q(x,\ y),$$

т. е. выполнены равенства (10) при $n=2$, то функции $P(x,\ y)=2x^2-y^2$, $Q(x,\ y)=2xy$ являются однородными функциями второй степени.

Применяя подстановку (11), т. е. полагая $y=ux$, находим $dy=udx+xdu$.

Подставив выражения для y и dy в исходное уравнение, получим:

$$(2x^2-u^2x^2)\,dx+2xux\,(udx+xdu)=0;$$

$$x^2\,[(2-u^2)\,dx+2u\,(udx+xdu)]=0. \qquad (I)$$

Предполагая, что $x\neq 0$, и сокращая уравнение (I) на x^2, получаем уравнение с разделяющимися переменными x и u

$$(2-u^2)\,dx+2u\,(udx+xdu)=0$$

или

$$(2+u^2)\,dx+2xudu=0. \qquad (II)$$

Разделяем переменные и интегрируем это уравнение:

$$\frac{2udu}{u^2+2}+\frac{dx}{x}=0;\ \ln(u^2+2)+\ln|x|=\ln|C|\ (C\neq 0);$$

$$(u^2+2)\,x=C\ \ (C\neq 0).$$

Подставив в последнюю формулу выражения для u, получим общий интеграл данного уравнения

$$\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2+2\right]x=C;\ y^2+2x^2=Cx\ \ (C\neq 0). \qquad (III)$$

Замечание. При делении уравнений (I) и (II) на x^2 предполагалось, что $x\neq 0$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что $x=0$ — интеграл рассматриваемого уравнения. Этот интеграл является частным интегралом, так как его можно получить из общего при фиксированном значении произвольной постоянной.

Действительно, положив $C=\frac{1}{C_1}$, перепишем интеграл (III) в виде

$$(2x^2+y^2)=\frac{1}{C_1}\,x;\ C_1(2x^2+y^2)=x. \qquad (IV)$$

Из формулы (IV) при $C_1=0$ получаем $x=0$.

Пример 2. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y'-\frac{2x}{x^2+1}\times$ $\times y=x^2+1$.

Данное уравнение имеет вид (12), оно является линейным. Решение линейного уравнения представим как произведение двух функций u и v, которые нужно определить.

Поскольку $y=uv$, $y'=u'v+uv'$ или $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}$, то

$$\left(\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}\right)-\frac{2x}{x^2+1}uv=x^2+1;$$

$$\frac{du}{dx}v+u\left(\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}v\right)=x^2+1. \qquad (I)$$

В качестве v выберем одну из функций, обращающих в нуль коэффициент при u в уравнении (I), т. е. решение уравнения

$$\frac{dv}{dx}-\frac{2x}{x^2+1}v=0. \qquad (II)$$

Уравнение (II) является уравнением с разделяющимися переменными v и x. Разделяя переменные, получаем

$$\frac{dv}{v}=\frac{2xdx}{x^2+1},$$

откуда

$$\ln|v|=\ln(x^2+1)+\ln C,\ v=C(x^2+1).$$

В качестве v возьмем одну из функций, например получающуюся из общего решения уравнения (II) при $C=1$, т. е.

$$v=x^2+1. \qquad (III)$$

Уравнение (I) с учетом (II) сводится к уравнению

$$\frac{du}{dx}v=x^2+1 \text{ или } \frac{du}{dx}(x^2+1)=x^2+1;\ \frac{du}{dx}=1,$$

из которого определяется

$$u=x+C. \qquad (IV)$$

Принимая во внимание выражения (III) и (IV), получаем общее решение исходного уравнения

$$y=uv=(x+C)(x^2+1);\ y=(x+C)(x^2+1).$$

Проинтегрировать однородные дифференциальные уравнения первого порядка:

1201. $(x^2-y^2)dx+2xydy=0$. **1202.** $(x+\sqrt{x^2+y^2})dx+ydy=0$.

1203. $2xydx+(4y^2-x^2)dy=0$. **1204.** $2xydx-(x^2+y^2)dy=0$.

1205. $y'(6x^2-y^2)-12xy=0$. **1206.** $y'(3x^2+y^2)-6xy=0$.

1207. $3xy^2y'+2x^3-y^3=0$. **1208.** $(x^3-2y^3)y'-3x^2y=0$.

1209. $4x^3ydx+(3y^4-x^4)dy=0$. **1210.** $(3y^4-x^4)dx+4xy^3dy=0$.

Проинтегрировать линейные дифференциальные уравнения первого порядка:

1211. $y'-2y=4x^2-6x+5$. **1212.** $y'+y-x^2=0$.

1213. $xy'-y=2x$.

1214. $y'+y\operatorname{ctg}x=\operatorname{tg}x$.

1215. $(1-x^2)y'+xy-3=0$.

1216. $x(x^2-1)y'-(2x^2-1)\times y+4x^3=0$.

1217. $y'x-y-x^2=0$.

1218. $y'\cos x+y\sin x=1$.

1219. $y'-\dfrac{xy}{x^2+1}=x$.

1220. $y'-\dfrac{1+2x}{x+x^2}\,y=\dfrac{1+2x}{x+x^2}$.

§ 54. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Решение многих научных и технических задач приводит к интегрированию дифференциальных уравнений. В этих задачах требуется установить зависимость между переменными величинами некоторого физического, химического или другого процесса, найти уравнение линии или поверхности и т. п.

Решение таких задач можно проводить в следующем порядке.

1. Составить дифференциальное уравнение по условию задачи.
2. Определить тип полученного уравнения и выбрать соответствующий метод его решения.
3. Проинтегрировать уравнение, найти общее решение.
4. Найти решение, удовлетворяющее начальным условиям.
5. В случае необходимости вычислить значения вспомогательных параметров (коэффициент пропорциональности и др.) по дополнительным условиям задачи.
6. Если это требуется, найти численные значения искомых величин.

Составить дифференциальное уравнение по условиям данной задачи — это значит найти зависимость между аргументом, искомой функцией этого аргумента и ее производной.

При составлении дифференциальных уравнений используется геометрический или механический смысл производной, кроме того, в зависимости от условия задачи применяются соответствующие законы физики, химии и других наук.

Пример 1. Найти линию, у которой отрезок нормали в любой ее точке, заключенный между осями координат, делится пополам в этой точке. Составить уравнение такой линии, проходящей через точку $M(5;\ 4)$.

Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ — произвольная точка (рис. 74) искомой линии $y=y(x)$, где $y(x)$—пока неизвестная функция аргумента x. Уравнение нормали к линии $y=y(x)$ в точке M_0

$$y-y_0=-\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0). \qquad (I)$$

Обозначим через A и B точки пересечения нормали (I) с координатными осями. Положив в этом уравнении $y=0$, найдем $x=x_0+y_0y'(x_0)$—абсциссу точки A; при $x=0$ из того же уравнения найдем $y=y_0+\dfrac{x_0}{y'(x_0)}$ — ординату точки B.

Поскольку M_0— середина отрезка AB, то

$$\frac{x_0+y_0y'(x_0)}{2}=x_0;\quad \frac{y_0+\dfrac{x_0}{y'(x_0)}}{2}=y_0. \qquad (II)$$

Каждое из уравнений (II) приводится к уравнению

$$y'(x_0)\,y_0-x_0=0. \qquad (III)$$

Уравнению (III) удовлетворяют координаты любой точки $M(x; y)$ искомой линии, поэтому

$$y'(x)\,y-x=0. \qquad \text{(IV)}$$

Уравнение (IV) является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя переменные и интегрируя, получаем общий интеграл

$$y^2-x^2=C. \qquad \text{(V)}$$

Общий интеграл (V) определяет множество равносторонних гипербол с действительной осью Oy при $C>0$; множество равносторонних гипербол с действительной осью Ox при $C<0$; пару прямых $y=x$, $y=-x$ при $C=0$. Найдем ту линию, которая проходит через точку M (5; 4). Подставив в уравнение (V) координаты точки M, определим значение параметра C:

$$4^2-5^2=C, \quad C=-9.$$

При $C=-9$ уравнение (V) принимает вид

$$y^2-x^2=-9 \text{ или } x^2-y^2=9.$$

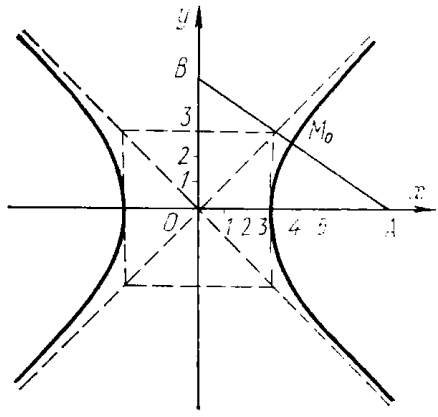


Рис. 74

Пример 2. Точка движется по прямой с постоянным ускорением. Найти закон движения точки.

В качестве независимой переменной выберем время. Тогда пройденный путь и скорость точки будут функциями времени.

Обозначим путь, пройденный точкой за время t, через s, скорость точки — через v и ускорение — через w. По условию $w=a$, где a — постоянная величина. Пусть в начальный момент времени заданы значения скорости v_0 и значение пути s_0, т. е. $v=v_0$, $s=s_0$ при $t=0$.

Так как ускорение точки при прямолинейном движении равно производной скорости по времени, то в силу условия задачи имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dt}=a \text{ или } dv=a\,dt.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем $v=at+C_1$. Значение постоянной C_1 определим по начальному уравнению: $v=v_0$ при $t=0$. Подставив эти значения v и t в выражение для v, найдем

$$v_0=a\cdot 0+C_1;\ C_1=v_0.$$

Следовательно, скорость движения точки выразится формулой

$$v=at+v_0.$$

Подставляя в эту формулу выражение для скорости v через производную от пути по времени $v=\dfrac{ds}{dt}$, получаем новое дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{ds}{dt}=at+v_0 \text{ или } ds=(at+v_0)\,dt.$$

Интегрируя это уравнение, находим общее решение данной задачи

$$s = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + C_2 .$$

Так как $s = s_0$ при $t = 0$, то $C_2 = s_0$, следовательно,

$$s = \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + s_0 .$$

В частности, полагая в выражениях для v и s $a = g$, $v_0 = 0$, $s_0 = 0$, $s = h$, получаем закон движения при свободном падении тела в пустоте:

$$v = gt; \quad h = \frac{1}{2} gt^2 .$$

Пример 3. В культуре пивных дрожжей быстрота прироста действующего фермента пропорциональна его наличному количеству. Если это количество удваивается в течение 1 ч, то во сколько раз оно увеличится через 4 ч?

Количество действующего фермента обозначим x, первоначальное его количество—x_0, время будем обозначать буквой t. Скорость прироста действующего фермента выразится производной $\frac{dx}{dt}$. По условию задачи составляем дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = kx$, где k—коэффициент пропорциональности.

Разделяя переменные и интегрируя полученное дифференциальное уравнение, находим

$$\frac{dx}{x} = k dt; \quad x = Ce^{kt} .$$

Постоянную C определим из начального условия $x = x_0$ при $t = 0$. Подставляя эти значения в уравнение $x = Ce^{kt}$, получаем

$$x_0 = Ce^{k \cdot 0}; \quad C = x_0 .$$

Следовательно, частное решение уравнения имеет вид

$$x = x_0 e^{kt} .$$

Определим коэффициент пропорциональности из начального условия $x = 2x_0$ при $t = 1$ ч:

$$2x_0 = x_0 e^{k \cdot 1}; \quad e^k = 2; \quad k = \ln 2 .$$

Подставляя найденное значение k в уравнение $x = x_0 e^{kt}$, получаем закон рассматриваемого процесса

$$x = x_0 \cdot 2^t .$$

Теперь можно определить, во сколько раз увеличится количество фермента через 4 ч. При $t = 4$ ч получаем

$$x = x_0 \cdot 2^4 = 16\, x_0 .$$

Таким образом, через 4 ч количество фермента увеличится в 16 раз.

Пример 4. Некоторые бактерии размножаются пропорционально их наличному количеству, но в то же время вырабатывают яд, истребляющий их пропорционально количеству яда и количеству бактерий. Скорость выработки яда пропорциональна наличному количеству бактерий. Показать, что число бакте-

рий сначала возрастает до некоторого наибольшего значения, а затем убывает до нуля; в момент времени t оно выражается формулой

$$y = \frac{4y_0}{(e^{kt} + e^{-kt})^2},$$

где y_0—наибольшее количество бактерий, а время t измеряется с того момента, когда $y=y_0$.

Обозначим количество бактерий через y, количество яда— через x, время — через t. Скорость размножения бактерий выразится производной $\frac{dy}{dt}$, скорость выработки яда—производной $\frac{dx}{dt}$. Согласно условию задачи, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = y(a-bx); \quad \frac{dx}{dt} = cy, \tag{I}$$

где a, b, c — коэффициенты пропорциональности.

Полученную систему можно свести к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными. Действительно разделив обе части первого уравнения на соответствующие части второго, получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}x \text{ или } dy = \left(\frac{a}{c} - \frac{b}{c}x\right)dx. \tag{II}$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$y = \frac{a}{c}x - \frac{b}{2c}x^2 + C_1. \tag{III}$$

Постоянную C_1 определим по начальным условиям. Так как $x=0$ при $y=0$, то из уравнения (III) при подстановке этих значений получаем $C_1=0$. Следовательно,

$$y = \frac{a}{c}x - \frac{b}{2c}x^2. \tag{IV}$$

Функция (IV) выражает зависимость количества бактерий от количества яда. График этой функции представляет собой параболу, проходящую через начало координат и точку $A\left(\frac{2a}{b}; 0\right)$, с осью симметрии, параллельной оси Oy, и с вершиной в точке $O\left(\frac{a}{b}; \frac{a^2}{2bc}\right)$. Функция (IV) имеет максимум $y_{max} = \frac{a^2}{2bc}$ при $x = \frac{a}{b}$. Обозначим

$$y_0 = y_{max} = \frac{a^2}{2bc} \tag{V}$$

Найдем теперь зависимость количества бактерий от времени t. Разрешая уравнение (IV) относительно x, получаем

$$x = \frac{a}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{y}{\frac{b}{2c}}}$$

Подставляя выражение для x в первое из уравнений (I), находим

$$\frac{dy}{dt}=ay-by\left(\frac{a}{b}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{y}{\frac{b}{2c}}}\right)=\mp by\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{y}{\frac{b}{2c}}}=$$

$$=\mp by\,\frac{a}{b}\sqrt{1-\frac{y}{\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{b}{2c}\right)}}=\mp ay\sqrt{1-\frac{y}{\frac{a^2}{2bc}}}$$

Принимая во внимание равенство (V), будем иметь

$$\frac{dy}{dt}=\mp dy\sqrt{1-\frac{y}{y_0}}\quad\text{или}\quad\frac{dy}{y\sqrt{1-\frac{y}{y_0}}}=\mp adt. \tag{VI}$$

Интегрируя, получаем

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{1-\frac{y}{y_0}}}=\mp at+C_2'. \tag{VII}$$

Чтобы найти интеграл в левой части равенства (VII), применим подстановку $\sqrt{1-\frac{y}{y_0}}=u$, откуда $y=y_0(1-u^2)$, $dy=-2uy_0du$.

Таким образом,

$$\int\frac{dy}{y\sqrt{1-\frac{y}{y_0}}}=\int\frac{-2uy_0du}{y_0(1-u^2)}=-2\int\frac{du}{1-u^2}=\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|+C_3'.$$

Следовательно,

$$\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|+C_2=\mp at. \tag{VIII}$$

Определим C_2 из начальных условий. Так как $y=y_0$ при $t=0$, то $u=0$ при $t=0$. Подставляя значения u и t в равенство (VIII), получаем $C_2=0$, поэтому

$$\ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right|=\pm at\quad\text{или}\quad\frac{1-u}{1+u}=e^{\mp at},$$

откуда

$$u=\frac{1-e^{\mp at}}{1+e^{\mp at}}=\frac{e^{\pm\frac{at}{2}}-e^{\mp\frac{at}{2}}}{e^{\pm\frac{at}{2}}+e^{\mp\frac{at}{2}}}.$$

Возвращаясь к переменной y, получаем

$$y=y_0(1-u^2)=\frac{4y_0}{\left(e^{kt}+e^{-kt}\right)^2},$$

где $k=\frac{a}{2}$.

Составить и решить дифференциальные уравнения по условиям следующих задач:

1221. Найти линию, проходящую через точку M (2; 3), для которой отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, делится пополам в точке касания.

1222. Найти такую кривую, проходящую через точку M (0; 5), чтобы угловой коэффициент касательной в любой ее точке равнялся ординате этой точки, уменьшенной на три единицы.

1223. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью $v_0=5$ м/с. На полном ходу ее мотор выключается, и через 40 с после этого скорость лодки уменьшается до $v_1=2$ м/с. Сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки. Определить скорость лодки через 2 мин после остановки мотора.

1224. Активность некоторого радиоактивного отложения пропорциональна скорости своего уменьшения. Найти зависимость этой активности от времени, если известно, что в течение 4 дней она уменьшилась вдвое.

1225. Предположим, что скорость прироста населения прямо пропорциональна количеству населения. Найти зависимость между количеством населения A и временем t, если известно, что в некоторый момент, принимаемый за начальный, количество населения равнялось A_0, а через год оно увеличилось на $a\%$. Вычислить на этой основе количество населения одного из городов на 1 января 1985 г., если известно, что 1 января 1976 г. оно составляло 200 тыс. человек, а годовой прирост за 1975 г. составил 1,7%.

1226. Некоторые бактерии размножаются со скоростью, пропорциональной их количеству. Найти закон изменения числа бактерий в зависимости от времени.

1227. Скорость размножения бактерий пропорциональна их количеству. В начальный момент имелось 100 бактерий, а в течение 4 ч их число удвоилось. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 12 ч?

1228. Определить уравнение кривой, по которой располагается уровень грунтовых вод вблизи круглого колодца, простирающегося до непроницаемого слоя.

1229. Некоторое количество нерастворимого вещества содержит в своих порах 10 кг соли. Подвергнув его действию 90 л воды, нашли, что в течение 1 ч растворилась половина содержащейся в нем соли. Сколько соли растворилось бы в течение того же времени, если бы количество воды было удвоено? Скорость растворения пропорциональна количеству нерастворенной соли и разности между концентрацией раствора в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 кг на 3 л).

1230. Скорость роста площади молодого листа виктории-регии, имеющего форму круга, пропорциональна длине окружности листа и количеству солнечного света, падающего на лист. Последнее в свою очередь пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью. Найти

зависимость между площадью листа S и временем t, если известно, что в 6 ч утра эта площадь равнялась 1600 см^2, а в 6 ч вечера того же дня — 2500 см^2. (Полагать, что угол между направлением солнца и вертикалью равен 90° в 6 ч утра и в 6 ч вечера и 0° в полдень.)

§ 55. Простейшие типы интегрируемых уравнений второго порядка. Случаи понижения порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{13}$$

или

$$y''=f(x, y, y'). \tag{14}$$

Общим решением уравнения (13) называется функция

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) \tag{15}$$

от x и двух произвольных независимых постоянных C_1, C_2, обращающая данное уравнение в тождество.

Общее решение уравнения (13), заданное в неявном виде,

$$\Phi(x, y, C_1, C_2)=0,$$

называется *общим интегралом*.

Частное решение

$$y=\varphi(x, C_1^0, C_2^0),$$

где C_1^0, C_2^0 — числа, получается из общего решения (15) при фиксированных значениях C_1 и C_2.

Задача Коши. Найти решение дифференциального уравнения (13), удовлетворяющее условиям $y=y_0$, $y'=y_0'$ при $x=x_0$.

Постоянные C_1, C_2 определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} y_0&=\varphi(x_0, C_1, C_2);\\ y_0'&=\varphi_x'(x_0, C_1, C_2).\end{aligned}\right\}$$

К простейшим интегрируемым типам дифференциальных уравнений второго порядка относятся уравнения, для которых функция, стоящая в правой части формулы (14), зависит или только от x, или только от y, или только от y', т. е. уравнения вида:

$$y''=f(x); \tag{16}$$

$$y''=f(y); \tag{17}$$

$$y''=f(y'). \tag{18}$$

Общее решение уравнения (16) находится двукратным интегрированием.

Уравнение (17) с помощью подстановки

$$y'=p \tag{19}$$

сводится к уравнению с разделяющимися переменными y и p:

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dy}\,y'=\frac{dp}{dy}\,p;\quad \frac{dp}{dy}\,p=f(y);$$

$$p\,dp=f(y)\,dy.$$

Из последнего уравнения определяется p, а из уравнения $y'=p$ — общий интеграл $\Phi(x, y, C_1, C_2)=0$.

Уравнение (18) подстановкой (19) сводится к уравнению с разделяющимися переменными p и x:

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}\ ;\ \frac{dp}{dx}=f(p);\ \frac{dp}{f(p)}=dx.$$

В некоторых случаях дифференциальные уравнения второго порядка сводятся к уравнениям первого порядка.

Уравнение

$$y''=f(x,\ y') \tag{20}$$

подстановкой (19) приводится к уравнению

$$\frac{dp}{dx}=f(x,\ p)$$

с неизвестной функцией p.

Уравнение

$$y''=f(y,\ y') \tag{21}$$

той же подстановкой сводится к уравнению

$$p\,\frac{dp}{dy}=f(y,\ p),$$

где роль независимой переменной играет y.

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y''=\cos x-\sin x$.

Это уравнение вида (16). Оно разрешено относительно y'', правая часть его зависит только от x. Общее решение такого уравнения находится в результате двукратного интегрирования.

Преобразуя исходное уравнение, получаем:

$$y''=(y')'=\frac{dy'}{dx}\ ;\ \frac{dy'}{dx}=\cos x-\sin x;\ dy'=(\cos x-\sin x)\,dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим производную искомой функции

$$y'=\sin x+\cos x+C_1.$$

Так как $y'=\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx}=\sin x+\cos x+C_1$, $dy=(\sin x+\cos x+C_1)\,dx$, то в результате интегрирования полученного уравнения находим общее решение

$$y=\sin x-\cos x+C_1x+C_2,$$

содержащее две произвольные постоянные C_1 и C_2.

Пример 2. Найти решение дифференциального уравнения $2y''y'=1$, удовлетворяющее условиям $y=0$, $y'=1$ при $x=1$.

Данное уравнение можно разрешить относительно y'', правая часть его будет зависеть только от y'; это уравнение вида (18).

Применяем подстановку (19), т. е. полагаем $y'=p$, тогда $y'=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}$, $2\frac{dp}{dx}\,p=1$, $2pdp=dx$, откуда $p^2=x+C_1$, $p=\pm\sqrt{x+C_1}$.

Из начального условия $p=y'=1$ при $x=1$ определяем $C_1=0$, поэтому

$$y'=p=\sqrt{x};\ \frac{dy}{dx}=\sqrt{x};\ dy=\sqrt{x}dx;$$

$$y=\frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}+C_2\,. \tag{I}$$

Используя начальное условие $y=0$ при $x=1$, определяем $C_2=-\frac{2}{3}$. Функция (I) принимает вид

$$y=\frac{2}{3}(x^{\frac{2}{3}}-1).$$

Она определяет искомое решение.

Пример 3. Найти интегральную кривую уравнения $y''y^3=6$, проходящую через точку M (0; 1) и касающуюся в ней прямой $y=1$.

Задача сводится к нахождению частного решения данного уравнения, удовлетворяющего условиям $y=1$, $y'=0$ при $x=0$.

Это уравнение вида (17). Для его решения применяем подстановку (19).

Так как $y'=p$, $y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p$, то $py^3=6$;

$pdp=\frac{6dy}{y^3}$; $pdp=6y^{-3}dy$.

Следовательно,

$$\frac{p^2}{2}=\frac{6}{-2y^3}+\frac{C_1}{2};\quad p^2=-\frac{6}{y^2}+C_1;\quad p=\pm\sqrt{C_1-\frac{6}{y^2}};$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{C_1-\frac{6}{y^2}}. \qquad (I)$$

Преобразуя уравнение (I), получаем

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{C_1y^2-6}}{y};\quad \pm\frac{ydy}{\sqrt{C_1y^2-6}}=dx;\quad \pm\frac{\frac{1}{2C_1}\,d(C_1y^2-6)}{\sqrt{C_1y^2-6}}=dx.$$

Интегрируя последнее уравнение, находим

$$\pm\frac{\sqrt{C_1y^2-6}}{C_1}=x+C_2;\quad C_1y^2-6=[C_1(x+C_2)]^2. \qquad (II)$$

Функция (II) определяет общий интеграл исходного уравнения.

Подставляя начальные данные в уравнения (I) и (II), получаем систему уравнений

$$0=\pm\sqrt{C_1-\frac{6}{1}};\quad C_1\cdot 1-6=[C_1(0+C_2)]^2,$$

из которой находим $C_1=6$, $C_2=0$.

Уравнение (II) при найденных значениях C_1 и C_2 принимает вид

$$6y^2-6=(6x)^2 \text{ или } y^2-6x^2=1.$$

Полученное уравнение определяет искомую интегральную кривую.

Пример 4. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $xy''-y'=0$.

Это уравнение вида (20). Для его решения применяем подстановку (19).

Поскольку $y'=p$, $y''=\frac{dp}{dx}$, то $x\frac{dp}{dx}-p=0$, $\frac{dp}{p}=\frac{dx}{x}$, откуда

$$\ln p=\ln x+\ln C_1 \text{ или } p=C_1x.$$

Подставляя в последнее уравнение выражение $p=y'$ и интегрируя, получаем

$$y'=C_1x;\quad dy=C_1xdx;\quad y=\frac{C_1x^2}{2}+C_2.$$

Следовательно, общее решение определяется формулой

$$y=Cx^2+C_2,$$

где $C_1=2C$.

Пример 5. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $yy''+y'^2+1=0$. Это уравнение вида (21). Для его решения применяем подстановку (19). Так как $y'=p$, $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dp}{dy}p$, то $y\frac{dp}{dy}p+p^2+1=0$;

$\frac{pdp}{p^2+1}+\frac{dy}{y}=0$, откуда

$$\frac{1}{2}\ln(p^2+1)+\ln y=\ln C_1;\ \ln(p^2+1)+2\ln y=2\ln C_1$$

или

$$(p^2+1)\,y^2=C_1^2;\quad p=\frac{\pm\sqrt{C_1^2-y^2}}{y}.$$

Поскольку $p=\frac{dy}{dx}$; $\frac{dy}{dx}=\frac{\pm\sqrt{C_1^2-y^2}}{y}$; $\frac{ydy}{\pm\sqrt{C_1^2-y^2}}=dx$,

$\frac{\frac{1}{2}d(C_1^2-y^2)}{\pm\sqrt{C_1^2-y^2}}=dx$, то $\mp\sqrt{C_1^2-y^2}=x+C_2$ или $(x+C_2)^2+y^2=C_1^2$.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения второго порядка:

1231. $y''=e^x$.

1232. $y''=2x$.

1233. $y''=\frac{x^2+x}{x}$.

1234. $y''=\frac{x^3-x}{x^3}$.

1235. $y''=\sqrt{1+y'^2}$.

1236. $(1-y)\,y''+2y'^2=0$.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения второго порядка; найти решения, удовлетворяющие указанным условиям:

1237. $y''=6x-2$, $y=3$, $y'=4$ при $x=2$.

1238. $y''y^3=1$, $y=1$, $y'=0$ при $x=0$.

1239. $x^2y''=(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$, $y=-2$, $y'=0$ при $x=1$.

1240. $yy''=1+y'^2$, $y=1$, $y'=0$ при $x=0$.

1241. $y'(1+y'^2)=y''$, $y=0$, $y'=\infty$ при $x=0$.

1242. $4y''-3\sqrt{y}=0$, $y=0$, $y'=0$ при $x=1$.

§ 56. Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{22}$$

где a, b, c — постоянные; $f(x)$ — функция от x.

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (22) называется *однородным линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами* или *уравнением без правой части*:

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{23}$$

Уравнение (23) можно привести к виду

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{24}$$

Уравнение

$$k^2 + pk + q = 0 \tag{25}$$

называется *характеристическим* для уравнения (24).

В зависимости от корней k_1 и k_2 характеристического уравнения (25) *общее решение* уравнения (24) определяется одной из формул:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \tag{26}$$

если k_1 и k_2 — различные действительные числа;

$$y = (C_1 x + C_2)\, e^{k_1 x}, \tag{27}$$

если $k_1 = k_2$;

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \tag{28}$$

если $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ — комплексные числа.

Пример 1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y'' + 2y' - 3y = 0$; найти частное решение, удовлетворяющее условиям $y = 2$, $y' = 2$ при $x = 0$.

Характеристическое уравнение (25) для данного уравнения принимает вид $k^2 + 2k - 3 = 0$ (отметим, что уравнения (24) и (25) имеют одни и те же коэффициенты).

Поскольку это характеристическое уравнение имеет различные действительные корни $k_1 = 1$, $k_2 = -3$, общее решение исходного дифференциального уравнения в соответствии с (26) определяется формулой

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}. \tag{I}$$

Чтобы найти указанное частное решение, подставим начальные данные $x = 0$, $y = 2$, $y' = 2$ в выражения для y и y', где

$$y' = C_1 e^{x} - 3C_2 e^{-3x}. \tag{II}$$

Подстановка этих данных в равенства (I) и (II) приводит к системе уравнений

$$2 = C_1 + C_2; \quad 2 = C_1 - 3C_2,$$

из которой определяются значения произвольных постоянных $C_1 = 2$, $C_2 = 0$.

При этих значениях C_1 и C_2 функция (I) принимает вид $y = 2e^{x}$. Последняя формула определяет искомое частное решение.

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $y'' - 2y' = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k = 0$ имеет также два различных действительных корня $k_1 = 0$, $k_2 = 2$ (один из них обращается в нуль).

Общее решение данного дифференциального уравнения определяется формулой

$$y = C_1 + C_2 e^{2x}.$$

Пример 3. Проинтегрировать уравнение $16y'' + 8y' + y = 0$.

Характеристическое уравнение $16k^2 + 8k + 1 = 0$ имеет два равных корня $k_1 = k_2 = -\frac{1}{4}$.

Общее решение данного дифференциального уравнения в соответствии с (27) определяется формулой

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{-\frac{x}{4}}.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 5 = 0$ имеет комплексные корни $k_1 = 1 + 2i$, $k_2 = 1 - 2i$.

Общее решение определяется формулой (28), в которой нужно положить $\alpha = 1$, $\beta = 2$:

$$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Пример 5. Решить уравнение $16y'' + y = 0$.

Характеристическое уравнение $16k^2 + 1 = 0$ имеет чисто мнимые корни $k_1 = \frac{1}{4} i$; $k_2 = -\frac{1}{4} i$.

Пользуясь формулой (28), полагая в ней $\alpha = 0$, $\beta = \frac{1}{4}$, получаем общее решение

$$y = C_1 \cos \frac{x}{4} + C_2 \sin \frac{x}{4}.$$

Проинтегрировать однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

1243. $y'' + y' - 6y = 0$.

1244. $y'' - 7y' + 12y = 0$.

1245. $y'' - 6y' + 8y = 0$.

1246. $y'' + y' - 12y = 0$.

1247. $y'' + 5y' + 4y = 0$.

1248. $y'' + 6y' + 5y = 0$.

1249. $y'' + 2y' = 0$.

1250. $y'' - 3y' = 0$.

1251. $y'' - 4y' + 4y = 0$.

1252. $y'' + 6y' + 9y = 0$.

1253. $9y'' + 6y' + y = 0$.

1254. $y'' + 10y' + 25y = 0$.

1255. $y'' - 6y' + 10y = 0$.

1256. $y'' - 6y' + 34y = 0$.

1257. $y'' + 2y' + 5y = 0$.

1258. $y'' + 8y' + 25y = 0$.

1259. $9y'' + y = 0$.

1260. $y'' + 16y = 0$.

§ 57. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + py' + qy = f(x). \qquad (29)$$

Общее решение уравнения (29) находится по формуле

$$y = y_0 + y_1, \tag{30}$$

где y_0 — общее решение соответствующего однородного линейного уравнения

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{31}$$

а y_1 — частное решение неоднородного линейного уравнения (29).

В случае, когда функция $f(x)$, входящая в уравнение (29), является показательной или полиномом, указанное частное решение находится с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Если

$$f(x) = ae^{mx},$$

где a, m — постоянные, то частное решение уравнения (29) находят в форме

$$y_1 = Ae^{mx}, \tag{32}$$

когда m не является корнем характеристического уравнения для уравнения (31), и в форме

$$y_1 = Axe^{mx} \tag{33}$$

или

$$y = Ax^2e^{mx},$$

когда m — соответственно простой или кратный корень характеристического уравнения.

Если

$$f(x) = a\cos mx + b\sin mx,$$

где a, b, m — постоянные, то частное решение уравнения (29) ищут в форме

$$y_1 = A\cos mx + B\sin mx,$$

когда

$$p^2 + (q - m^2)^2 \neq 0, \tag{34}$$

т. е. $p \neq 0$ и $q \neq m^2$, и в форме

$$y_1 = x(A\cos mx + B\sin mx), \tag{35}$$

когда $p = 0$, $q = m^2$.

Если

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c — постоянные, то частное решение уравнения (29) найдется в форме

$$y_1 = Ax^2 + Bx + C \tag{36}$$

при $q \neq 0$, и в форме

$$y_1 = x(Ax^2 + Bx + C)$$

при $q = 0$, $p \neq 0$.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение $y'' + 4y' + 20y = 34e^{-x}$.

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y' + 20y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 20 = 0$ имеет корни $k_1 = -2 + 4i$, $k_2 = -2 - 4i$. Следовательно, общее решение однородного уравнения определяется формулой

$$y_0 = e^{-2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x).$$

Переходим к отысканию частного решения исходного уравнения. Так как в данном случае $f(x) = 34e^{-x}$ (т. е. $f(x) = ae^{mx}$, где $a = 34$, $m = -1$) и $m =$

$= -1$ не является корнем характеристического уравнения, то в соответствии с формулой (32) ищем частное решение в виде

$$y_1 = Ae^{-x}.$$

Находя производные этой функции $y_1' = -Ae^{-x}$, $y_1'' = Ae^{-x}$ и подставляя выражения для y_1, y_1', y_1'' в исходное уравнение, получаем

$$Ae^{-x} - 4Ae^{-x} + 20Ae^{-x} = 34e^{-x}.$$

Так как y_1 — решение уравнения, то последнее равенство выполняется для всех x, т. е. является тождеством,

$$17Ae^{-x} = 34e^{-x},$$

откуда $17A = 34$; $A = 2$.

Следовательно, частное решение имеет вид $y_1 = 2e^{-x}$.

На основании формулы (30) получаем общее решение

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + 2e^{-x}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' - 7y = 24e^{-x}$.

Характеристическое уравнение $k^2 - 6k - 7 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$, $k_2 = 7$, поэтому общее решение однородного уравнения $y'' - 6y' - 7y = 0$ определяется формулой

$$y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^{7x}.$$

Функция $f(x) = 24e^{-x}$ получается из формулы (32) при $a = 24$, $m = -1$. Так как $m = -1$ — корень характеристического уравнения, то в соответствии с формулой (33) частное решение ищем в виде $y_1 = Axe^{-x}$. Подставляя в исходное уравнение выражения для y_1, y_1', y_1'', где $y_1' = Ae^{-x} - Axe^{-x}$, $y_1'' = Axe^{-x} - 2Ae^{-x}$, получим

$$Axe^{-x} - 2Ae^{-x} - 6(Ae^{-x} - Axe^{-x}) - 7Axe^{-x} = 24e^{-x} \text{ или } -8Ae^{-x} = 24e^{-x},$$

откуда $-8A = 24$; $A = -3$. Следовательно, $y_1 = 3xe^{-x}$. На основании формулы (30) получаем общее решение

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{7x} - 3xe^{-x}.$$

Пример 3. Проинтегрировать уравнение $y'' + 2y' + y = 8e^{-x}$.

Соответствующее однородное уравнение $y'' + 2y' + y = 0$ имеет общее решение

$$y_0 = (C_1 + C_2x)e^{-x},$$

так как для характеристического уравнения $k^2 + 2k + 1 = 0$ получаем равные корни $k_1 = k_2 = -1$.

Частное решение исходного уравнения ищем в виде $y_1 = Ax^2e^{-x}$, ибо $m = -1$ — двойной корень характеристического уравнения.

Находим производные функции y_1:

$$y_1' = 2Axe^{-x} - Ax^2e^{-x}; \quad y_1'' = 2Ae^{-x} - 4Axe^{-x} + Ax^2e^{-x}.$$

Подставляя выражения для y_1', y_1'' в уравнение, получаем

$$2Ae^{-x} - 4Axe^{-x} + Ax^2e^{-x} + 2(2Axe^{-x} - Ax^2e^{-x}) + Ax^2e^{-x} = 8e^{-x},$$

$$\text{или } 2Ae^{-x} = 8e^{-x},$$

откуда $2A = 8$; $A = 4$. Таким образом, получено частное решение

$$y_1 = 4x^2e^{-x}.$$

Общее решение определится формулой

$$y = (C_1 + C_2x)\ e^{-x} + 4x^2e^{-x}.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' + 5y' + 4y = 8x^2 - 4x - 14$.

Правая часть данного уравнения является полиномом второй степени $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a = 8$, $b = -4$, $c = -14$.

Так как $q \neq 0$, то в соответствии с формулой (36) частное решение ищем в виде

$$y_1 = Ax^2 + Bx + C.$$

Подставляя выражение для y_1, $y_1' = 2Ax + B$, $y_1'' = 2A$ в данное уравнение, получаем

$$2A + 5(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = 8x^2 - 4x - 14$$

или

$$4Ax^2 + (10A + 4B)\ x + (2A + 5B + 4C) = 8x^2 - 4x - 14.$$

Поскольку y_1 — решение дифференциального уравнения, то последнее равенство должно выполняться для всех x, т. е. является тождеством, поэтому коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящие в разных частях, равны между собой, т. е. $4A = 8$, $10A + 4B = -4$, $2A + 5B + 4C = -14$.

Из полученной системы уравнений находим, что $A = 2$, $B = -6$, $C = 3$, поэтому

$$y = 2x^2 - 6x + 3.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 5y' + 4y = 0$ определяется формулой

$$y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^{-4x},$$

так как характеристическое уравнение $k^2 + 5k + 4 = 0$ имеет корни $k_1 = -1$ $k_2 = -4$.

На основании формулы (30) получаем общее решение исходного уравнения

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-4x} + 2x^2 - 6x + 3.$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 9y = -\cos x$.

Правая часть данного уравнения является тригонометрическим многочленом вида $f(x) = a\cos mx + b\sin mx$, где $a = -1$, $b = 0$, $m = 1$.

Так как выполнено условие (34), частное решение ищем в форме

$$y_1 = A\cos x + B\sin x.$$

Находим производные:

$$y_1' = -A\sin x + B\cos x; \quad y_1'' = -A\cos x - B\sin x.$$

Подставляя выражения для y_1, y_1', y_1'' в данное уравнение, получаем

$$(-A\cos x - B\sin x) - 6(-A\sin x + B\cos x) + 9(A\cos x + B\sin x) = -\cos x$$

или

$$(8A - 6B)\cos x + (8B + 6A)\sin x = -\cos x,$$

откуда $8A - 6B = -1$; $8B + 6A = 0$.

Решая полученную систему уравнений, находим $A = -0{,}08$, $B = 0{,}06$.

Следовательно, частное решение

$$y = 0{,}06\sin x - 0{,}08\cos x.$$

Соответствующее однородное уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$ имеет общее решение

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{3x},$$

так как для характеристического уравнения $k^2 - 6k + 9 = 0$ получаем $k_1 = k_2 = 3$.

По формуле (30) находим общее решение исходного уравнения

$$y = (C_1 + C_2 x)\, e^{3x} + 0{,}06\sin x - 0{,}08\cos x.$$

Замечание. Частное решение мы искали в виде $y_1 = A\cos x + B\sin x$, а не в виде $y = A\cos x$, так как из $b = 0$ не следует $B = 0$.

Проинтегрировать уравнения:

1261. $y'' + 2y' + y = 10e^{2x}$. **1262.** $y'' + 9y' + 14y = 11e^{4x}$.

1263. $y'' - 7y' + 10y = 16e^{2x}$. **1264.** $y'' - y' - 6y = 10e^{-2x}$.

1265. $4y'' + 4y' + y = 24e^{-\frac{x}{2}}$. **1266.** $y'' + 2y' + y = e^{-x}$.

1267. $9y'' - 6y' + y = 3x^2 - 27x + 8$. **1268.** $y'' - 5y' + 6y = 12x^2 - 2x + 13$.

1269. $25y'' + 10y' + y = 2x^2 + 8x - 120$. **1270.** $y'' - 3y' + 2y = x^2$.

1271. $y'' - 4y' + 3y = x - 1$. **1272.** $y'' - 3y' - 4y = 8x + 18$.

1273. $y'' - 2y' = 6x^2 - 10x + 12$. **1274.** $y'' + 4y' = 3x^2$.

1275. $y'' - 3y' - 10y = \sin x + 3\cos x$. **1276.** $y'' - 6y' + 5y = 10\sin x - 2\cos x$.

1277. $y'' - 8y' + 12y = -65\cos 4x$. **1278.** $y'' + 5y' - 6y = 30\sin 3x$.

1279. $y'' + 16y = -24\sin 4x$. **1280.** $y'' + 4y = 8\cos 2x$.

§ 58. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и колебательные явления

С помощью дифференциального уравнения второго порядка записывается *основное уравнение динамики.*

Пусть материальная точка M массой $m > 0$ совершает прямолинейное движение под действием переменной силы F. Введем на этой прямой систему координат, обозначим координатную ось Ox. Пройденный путь $x = OM$ будет функцией времени t, т. е. $x = x(t)$, причем x, x'_t, x''_{tt} выражают соответственно положение, скорость v и ускорение w точки M в момент времени t. В общем случае сила F зависит от времени t, положения x и скорости v. Согласно второму закону Ньютона ($mw = F$), получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$mx''_{tt} = F(t,\ x,\ x'_t) \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = F(t,\ x,\ \dot{x}), \tag{37}$$

определяющее закон этого движения точки по оси Ox. (Вторая запись уравнения содержит первую производную $\dot{x}$ и вторую производную $\ddot{x}$ функции $x = x(t)$ по времени t.)

Всякое решение $x = x(t)$ уравнения (37) называют *движением* (так как оно соответствует некоторому движению, т. е. выражает закон соответствующего движения — зависимость пути x от времени t). Задача интегрирования уравнения (37) состоит в нахождении всех движений, определяемых этим уравнением, и изучении их свойств.

Задача Коши. Найти решение $x=x(t)$ уравнения (37), удовлетворяющее начальным данным:

$$x = x_0, \quad \dot{x} = v_0 \quad \text{при } t = t_0,$$

где x_0, v_0, t_0 — заданные числа.

Механическое истолкование задачи Коши. Из всех движений, определяемых уравнением (37), найти движение $x=x(t)$, при котором движущаяся точка занимала бы в данный (начальный) момент времени t_0 заданное (начальное) положение x_0 и имела бы заданную (начальную) скорость v_0.

Предположим, что материальная точка движется по оси Ox, находясь под действием восстанавливающей силы $-ax$ $(a>0)$, притягивающей точку к началу координат, силы сопротивления среды $-b\dot{x}$ $(b\geqslant 0)$, пропорциональной скорости, и возмущающей силы $F(t)$, направленной по оси Ox. Уравнение (37) в этом случае принимает вид

$$m\ddot{x} = -ax - b\dot{x} + F(t);$$

его можно переписать так:

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + qx = f(t), \tag{38}$$

где

$$2p = \frac{b}{m} \geqslant 0; \quad q = \frac{a}{m} > 0; \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}.$$

Если возмущающая сила $F(t)$ отсутствует, т. е. $F(t) \equiv 0$, тогда $f(t) \equiv 0$, уравнение (38) принимает вид

$$\ddot{x} + 2p\dot{x} + qx = 0. \tag{39}$$

Уравнение (39) называется *уравнением свободных колебаний*, а уравнение (38), в котором $f(t) \not\equiv 0$, — *уравнением вынужденных колебаний*.

Уравнения (38) и (39) являются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами (аргумент обозначен буквой t, а искомая функция — буквой x). Интегрирование этих уравнений осуществляется с помощью методов, о которых шла речь в § 56, 57.

Пример 1. Проинтегрировать уравнение $\ddot{x}+\lambda^2 x=0$.

Данное уравнение является частным случаем уравнения свободных колебаний. Оно получается из уравнения (39) при $p=0$ $(q=\lambda^2)$ и описывает колебания в среде без сопротивления.

Характеристическое уравнение $k^2 + \lambda^2 = 0$ имеет чисто мнимые корни $k_1 = -i\lambda$, $k_2 = i\lambda$, поэтому общее решение данного уравнения выражается формулой

$$x(t) = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t.$$

Если вместо C_1 и C_2 ввести новые произвольные постоянные A и φ, положив

$$C_1 = A \sin \varphi; \quad C_2 = A \cos \varphi,$$

то общее решение преобразуется к виду

$$x(t) = A \sin (\lambda t + \varphi). \tag{I}$$

Движение, соответствующее ненулевому решению (I), называется *чисто гармоническим колебанием с периодом* $T=2\pi/\lambda$, *частотой* λ, *амплитудой* A и *начальной фазой* φ. (Напомним определения: периодом колебания называется промежуток времени, за который аргумент синуса в формуле (I) изменится на 2π; частота колебаний — число колебаний за период времени 2π; амплитуда колебаний — величина наибольшего отклонения от положения равновесия; начальная фаза — величина φ в формуле (I).)

Найдем решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x = x_0; \quad \dot{x} = v_0 \quad \text{при } t = 0,$$

где x_0, v_0 — заданные числа. Подставляя начальные данные $t = 0$, x_0, v_0 в формулы $x = A\sin(\lambda t + \varphi)$, $\dot{x} = A\lambda\cos(\lambda t + \varphi)$, получаем $x_0 = A\sin\varphi$, $v_0 = A\lambda\cos\varphi$, откуда

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\lambda^2}}; \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\lambda x_0}{v_0}.$$

Замечание. Из формулы (I) видно, что при любом t

$$|x(t)| \leqslant A,$$

т. е. всякое движение (движение с любыми начальными данными) ограничено при всех значениях t.

Пример 2. Проинтегрировать уравнение $\ddot{x} + 2p\dot{x} + \lambda^2 x = 0$.

Это уравнение свободных колебаний (предполагается, что $p > 0$, т. е. колебания происходят в среде с сопротивлением). Характеристическое уравнение $k^2 + 2pk + \lambda^2 = 0$ имеет корни $k_1 = -p - \sqrt{p^2 - \lambda^2}$; $k_2 = -p + \sqrt{p^2 - \lambda^2}$. В зависимости от подкоренного выражения здесь возможны три случая.

1. Если $p^2 - \lambda^2 > 0$ (случай большого сопротивления), то корни характеристического уравнения являются действительными отрицательными числами. Общее решение имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{(-p-\sqrt{p^2-\lambda^2})t} + C_2 e^{(-p+\sqrt{p^2-\lambda^2})t}.$$

Движения, определяемые этой формулой, называются *апериодическими*. Из формулы следует, что всякое ненулевое решение данного уравнения стремится к нулевому решению $x \equiv 0$ при $t \to \infty$.

2. Если $p^2 - \lambda^2 = 0$ (граничный случай), то характеристическое уравнение имеет два равных отрицательных корня $k_1 = k_2 = -p < 0$. Общее решение дифференциального уравнения определяется формулой

$$x(t) = e^{-pt}(C_1 + C_2 t),$$

из которой видно, что всякое ненулевое решение стремится к нулевому решению $x \equiv 0$ при $t \to \infty$. Соответствующие этому решению движения также называются *апериодическими*.

3. Если $p^2 - \lambda^2 < 0$ (случай малого сопротивления), то корни характеристического уравнения являются сопряженными комплексными числами $k_1 = -p - i\sqrt{\lambda^2 - p^2}$; $k_2 = -p + i\sqrt{\lambda^2 - p^2}$. Общее решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$x(t) = e^{-pt}\left[C_1\cos\left(\sqrt{\lambda^2 - p^2}\,t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\lambda^2 - p^2}\,t\right)\right]$$

или

$$x(t) = Ae^{-pt}\sin\left(\sqrt{\lambda^2 - p^2}\,t + \varphi\right),$$

где A и φ связаны с C_1, C_2 формулами $C_1 = A\sin\varphi$, $C_2 = A\cos\varphi$.

Движения, определяемые формулой $x(t) = Ae^{-pt}\sin\left(\sqrt{\lambda^2 - p^2}\,t + \varphi\right)$, называются *затухающими гармоническими колебаниями* с периодом $T = 2\pi : \sqrt{\lambda^2 - p^2}$, частотой $\omega = \sqrt{\lambda^2 - p^2}$, амплитудой Ae^{-pt} и начальной фазой φ. Из этой формулы видно, что $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Замечания: 1. В отличие от чисто гармонических колебаний $x(t) = A\sin(kt + \varphi)$ амплитуда Ae^{-pt} здесь не является постоянной; она зависит от времени t. Множитель e^{-pt} характеризует быстроту затухания. Число p называется *коэффициентом затухания*, а число A — *начальной амплитудой* (поскольку $Ae^{-pt}|_{t=0} = A$).

2. Если заданы начальные условия $x = x_0$, $\dot{x} = v_0$ при $t = 0$, то по ним определяются начальная амплитуда A и начальная фаза φ.

Пример 3. Проинтегрировать уравнение $\ddot{x} + \lambda^2 x = a \sin \omega t$.

Это уравнение вынужденных колебаний в среде без сопротивления ($p = 0$), когда возмущающая сила $F(t) = N \sin \omega t$ является гармонической $\left(f(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{N}{m} \sin \omega t = a \sin \omega t,\ a = \frac{N}{m}\right)$.

Характеристическое уравнение $k^2 + \lambda^2 = 0$ имеет чисто мнимые корни $k_1 = -i\lambda$, $k_2 = i\lambda$. Общее решение данного дифференциального уравнения зависит от соотношения между λ и ω. Здесь нужно рассмотреть два случая.

1. Если $\omega \neq \lambda$, то частное решение данного неоднородного уравнения $\ddot{x} + \lambda^2 x = a \sin \omega t$ следует искать в виде

$$x_1(t) = P \cos \omega t + Q \sin \omega t.$$

Находя производные этой функции

$$\dot{x}_1 = -P\omega \sin \omega t + Q\omega \cos \omega t; \quad \ddot{x}_1 = -P\omega^2 \cos \omega t - Q\omega^2 \sin \omega t$$

и подставляя выражения для $\dot{x}_1$, $\ddot{x}_1$ в исходное уравнение, получаем

$$-P\omega^2 \cos \omega t - Q\omega^2 \sin \omega t + \lambda^2 (P \cos \omega t + Q \sin \omega t) \equiv a \sin \omega t$$

или

$$P(\lambda^2 - \omega^2) \cos \omega t + Q(\lambda^2 - \omega^2) \sin \omega t = a \sin \omega t,$$

откуда $P(\lambda^2 - \omega^2) = 0$; $Q(\lambda^2 - \omega^2) = a$; $P = 0$; $Q = \frac{a}{\lambda^2 - \omega^2}$.

Следовательно,

$$x_1(t) = \frac{a}{\lambda^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Так как общее решение соответствующего однородного уравнения $\ddot{x} + \lambda^2 x = 0$ выражается формулой $x_0(t) = C_1 \cos \lambda t + C_2 \sin \lambda t$ или $x_0(t) = A \sin(\lambda t + \varphi)$ и $x_{\text{общ}}(t) = x_0(t) + x_1(t)$, то общее решение исходного уравнения имеет вид

$$x(t) = A \sin(\lambda t + \varphi) + \frac{a}{\lambda^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

2. Если $\omega = \lambda$, т. е. $k_1 = -i\omega$, $k_2 = i\omega$ — корни характеристического уравнения, то в соответствии с формулой (35), а также с учетом других обозначений (x — функция, t — аргумент; вместо p, m, q здесь записаны $2p$, ω, λ^2) частное решение исходного уравнения следует искать в виде

$$x_1(t) = t(P \cos \omega t + Q \sin \omega t).$$

Так как $\dot{x}_1 = P \cos \omega t + Q \sin \omega t + t(-P\omega \sin \omega t + Q\omega \cos \omega t)$; $\ddot{x}_1 = 2(-P\omega \sin \omega t + Q\omega \cos \omega t) + t(-P\omega^2 \cos \omega t - Q\omega^2 \sin \omega t)$, то подстановка $x_1(t)$, $\dot{x}_1(t)$, $\ddot{x}_1(t)$ в исходное уравнение приводит к тождеству

$$-2P\omega \sin \omega t + 2Q\omega \cos \omega t \equiv a \sin \omega t,$$

откуда $-2P\omega = a$; $2Q\omega = 0$; $P = -\frac{a}{2\omega}$; $Q = 0$.

Следовательно,

$$x_1(t) = -\frac{a}{2\omega}\, t\cos\omega t.$$

Поскольку $x_0(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$; $x_0(t) = A\sin(\omega t+\varphi)$; $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$, то $x(t) = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t - \frac{a}{2\omega}\, t\cos\omega t$ или

$$x(t) = A\sin(\omega t+\varphi) - \frac{a}{2\omega}\, t\cos\omega t.$$

Эта формула показывает, что при $\omega=\lambda$ наблюдаются колебания с неограниченно возрастающей амплитудой. В физике такое явление называют *резонансом* между собственными колебаниями материальной точки и возмущающей силой.

Замечание. Второе слагаемое этой алгебраической суммы называют *вековым членом*. Он представляет собой произведение t на периодическую функцию от t.

Пример 4. Проинтегрировать уравнение $\ddot{x} + 2p\dot{x} + \lambda^2 x = a\sin\omega t$, где $p > 0$, $p^2 < \lambda^2$.

Это уравнение колебаний в среде с сопротивлением, происходящих под действием гармонической возмущающей силы. Характеристическое уравнение $k^2 + 2pk + \lambda^2 = 0$ имеет комплексно-сопряженные корни $k_1 = -p - i\sqrt{\lambda^2 - p^2}$; $k_2 = -p + i\sqrt{\lambda^2 - p^2}$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения $\ddot{x} + 2p\dot{x} + \lambda^2 x = 0$ определяется формулой

$$x_0(t) = e^{-pt}\left[C_1\cos\left(\sqrt{\lambda^2 - p^2}\; t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{\lambda^2 - p^2}\; t\right)\right];$$

$$x_0(t) = Ae^{-pt}\sin\left(\sqrt{\lambda^2 - p^2}\; t + \varphi\right).$$

Частное решение исходного неоднородного уравнения ищем в виде функции

$$x_1(t) = P\cos\omega t + Q\sin\omega t. \qquad (I)$$

Подставляя эту функцию и ее производные $\dot{x}_1(t) = -P\omega\sin\omega t + Q\omega\cos\omega t$, $\ddot{x}_1(t) = -P\omega^2\cos\omega t - Q\omega^2\sin\omega t$ в исходное уравнение, получаем тождество

$$(-P\omega^2\cos\omega t - Q\omega^2\sin\omega t) + 2p(-P\omega\sin\omega t + Q\omega\cos\omega t) +$$

$$+ \lambda^2(P\cos\omega t + Q\sin\omega t) \equiv a\sin\omega t$$

или

$$[P(\lambda^2 - \omega^2) + 2p\omega Q]\cos\omega t + [Q(\lambda^2 - \omega^2) - 2p\omega P]\sin\omega t \equiv a\sin\omega t,$$

откуда

$$P(\lambda^2 - \omega^2) + 2p\omega Q = 0;\quad Q(\lambda^2 - \omega^2) - 2p\omega P = a.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$P = -\frac{2pa\omega}{4p^2\omega^2 + (\lambda^2 - \omega^2)^2};\quad Q = \frac{a(\lambda^2 - \omega^2)}{4p^2\omega^2 + (\lambda^2 - \omega^2)^2}. \qquad (II)$$

Вводим новые постоянные A_1 и φ_1 по формулам

$$P = A_1\sin\varphi_1;\quad Q = A_1\cos\varphi_1, \qquad (III)$$

т. е.

$$A_1 = \sqrt{P^2 + Q^2} = \frac{a}{\sqrt{4p^2\omega^2 + (\lambda^2 - \omega^2)^2}};\quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{P}{Q} \qquad (IV)$$

Формула (I) с учетом формул (II) — (IV) принимает вид

$$x_1(t) = \frac{a}{\sqrt{4p^2\omega^2 + (\lambda^2 - \omega^2)^2}} \sin(\omega t + \varphi_1).$$

Общее решение исходного уравнения определяется формулой $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$ или

$$x(t) = Ae^{-pt} \sin(\sqrt{\lambda^2 - p^2}\, t + \varphi) + \frac{a}{\sqrt{4p^2\omega^2 + (\lambda^2 - \omega^2)^2}} \sin(\omega t + \varphi_1).$$

Первое из слагаемых в правой части этой формулы определяет затухающие колебания. Это слагаемое убывает с возрастанием t. Следовательно, через некоторый промежуток времени главное значение $x(t)$ будет определяться вторым слагаемым, которое характеризует вынужденные колебания. Частота этих колебаний равна частоте внешней силы $f(t) = a \sin \omega t$; амплитуда вынужденных колебаний будет тем больше, чем меньше p и разность $\lambda^2 - \omega^2$.

1281. При каком значении ω общее решение уравнения $\ddot{x} + 4x = \sin \omega t$ не будет содержать векового члена?

1282. При каких значениях λ общее решение уравнения $\ddot{x} + \lambda^2 x = \sin 3t$ не имеет векового члена?

1283. При каких значениях p все ненулевые решения уравнения $\ddot{x} + 2p\dot{x} + 4x = 0$ определяют затухающие гармонические колебания?

1284. При каких значениях λ все ненулевые решения уравнения $\ddot{x} + 2\dot{x} + \lambda^2 x = 0$ представляют затухающие гармонические колебания?

Проинтегрировать уравнения:

1285. $\ddot{x} + x = 0$.

1286. $\ddot{x} + 4x = 0$.

1287. $\ddot{x} + 9x = 0$.

1288. $\ddot{x} + 10\dot{x} + 9x = 0$.

1289. $\ddot{x} + 10\dot{x} + 16x = 0$.

1290. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4 = 0$.

1291. $\ddot{x} + 6\dot{x} + 9x = 0$

1292. $\ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 0$.

1293. $\ddot{x} + 6\dot{x} + 25x = 0$.

1294. $\ddot{x} + x = 3 \sin 2t$.

1295. $\ddot{x} + 4x = 10 \sin 3t$.

1296. $\ddot{x} + x = 4 \sin t$.

1297. $\ddot{x} + 9x = 24 \sin 3t$.

1298. $\ddot{x} + 8\dot{x} + 25x = 65 \sin 4t$.

1299. $\ddot{x} + 6\dot{x} + 25x = 36 \sin 3t$.

1300. $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = 5 \sin t$.

Найти решение указанной задачи Коши для уравнений:

1301. $\ddot{x} + x = 0$; $x = 1$, $\dot{x} = 1$ при $t = 0$.

1302. $\ddot{x} + 4x = 0$; $x = -1$, $\dot{x} = 2$ при $t = 0$.

1303. $\ddot{x} + 9x = 0$; $x = -2$, $\dot{x} = 6$ при $t = 0$.

1304. $\ddot{x} + 16x = 0$; $x = 2$, $\dot{x} = 8$ при $t = 0$.

1305. $\ddot{x} + 25x = 0$; $x = 0$, $\dot{x} = 5$ при $t = 0$.

1306. $\ddot{x} + 9x = 0$; $x = 0$, $\dot{x} = 6$ при $t = 0$.

§ 59. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется совокупность n уравнений вида

$$y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x);$$

$$y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x),$$

где $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, $\ldots$, $y_n = y_n(x)$ — искомые функции переменной x; a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$—постоянные величины; $f_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ — заданные функции. Если $f_k(x) \equiv 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то система называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*.

Решением системы называется совокупность n функций

$$y_1 = y_1(x);\ y_2 = y_2(x);\ \ldots;\ y_n = y_n(x),$$

обращающих каждое из уравнений этой системы в тождество.

Задача Коши. Найти решение системы, удовлетворяющее условиям: $y_1 = b_1$, $y_2 = b_2$, $\ldots$, $y_n = b_n$ при $x = x_0$, где b_1, b_2, $\ldots$, b_n, x_0 — заданные числа.

Методом исключения n—1 неизвестных функций данную систему можно привести к линейному дифференциальному уравнению n-го порядка с постоянными коэффициентами относительно одной из функций.

Замечание. Если аргумент функций обозначить t, то исходную систему можно записать так:

$$\dot{y}_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}y_i - f_k(t) \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\dot{y}_k$ — производные функций $y_k = y_k(t)$.

Пример 1. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений $y' = y + z$; $z' = 3z - 2y$.

Дифференцируя первое уравнение и принимая во внимание данные уравнения системы, находим

$$y'' = y' + z' = (y + z) + (3z - 2y) = 4z - y;\ y'' = 4z - y.$$

Определяем z из первого уравнения и подставляем его выражение в полученное уравнение:

$$z = y' - y;\ y'' = 4z - y = 4(y' - y) - y = 4y' - 5y;\ y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Так как $z = y' - y$; $y' = 2e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{2x}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x)$,

то

$$z = e^{2x}[(C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x].$$

Следовательно, общее решение данной системы определяется формулами

$$y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x);\ z = e^{2x}[(C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x].$$

Пример 2. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений $\dot{x} = 12x - 11y + t;\ \dot{y} = 13x - 12y - t$.

Эта система уравнений является неоднородной. Дифференцируя первое уравнение по t и принимая во внимание данные уравнения, получаем

$$\ddot{x} = 12\dot{x} - 11\dot{y} + 1 = 12(12x - 11y + t) - 11(13x - 12y - t) + 1 = x + 23t + 1.$$

Решая полученное уравнение $\ddot{x} - x = 23t + 1$, находим

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{t} - 23t - 1.$$

Поскольку $\dot{x} = -C_1e^{-t} + C_2e^{t} - 23$, то

$$y = \frac{1}{11}(12x - \dot{x} + t) = \frac{1}{11}[12(C_1e^{-t} + C_2e^{t} - 23t - 1) -$$

$$-(-C_1e^{-t} + C_2e^{t} - 23) + t] = \frac{13}{11}C_1e^{-t} + C_2e^{t} - 25t + 1.$$

Следовательно, общее решение определяется формулами

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{t} - 23t - 1;\ y = \frac{13}{11}C_1e^{-t} + C_2e^{t} - 25t + 1.$$

Проинтегрировать системы уравнений:

1307. $y' = y - z;\ z' = z - 4y$. **1308.** $y' = 8z - y;\ z' = y + z$.

1309. $y' = y - 3z;\ z' = 3y + z$. **1310.** $y' = y + 2z;\ z' = -2y + 3z$.

1311. $y' = 3y + z;\ z' = -5y - 3z$.

1312. $y' = 5y + 3z;\ z' = -3y - 5z$.

1313. $\dot{x} = 8x - 9y + 3t;\ \dot{y} = 7x - 8y + 2t$.

1314. $\dot{x} = 11x - 10y + t^2;\ \dot{y} = 12x - 11y - t^2$.

1315. $\dot{x} = 3x + 4y - e^{3t};\ \dot{y} = 4x - 3y - e^{4t}$.

1316. $\dot{x} = 6x - 5y + 3e^{2t};\ \dot{y} = 7x - 6y - 3e^{-2t}$.

1317. $\dot{x} = 4x - 3y + 2\sin t;\ \dot{y} = 3x - 2y + 3\cos t$.

1318. $\dot{x} = 3x - 2y - \cos 2t;\ \dot{y} = 2x - y + \sin 2t$.

1319. $\dot{x} = 5x + 3y - \sin 4t;\ \dot{y} = -3x - 5y + \cos 4t$.

1320. $\dot{x} = 4x - 5y + \cos 3t;\ \dot{y} = 5x - 4y - \sin 3t$.

ОТВЕТЫ

3. $M_1(x_0; -y_0)$, $M_2(-x_0; y_0)$, $M_3(-x_0; -y_0)$, $M_4(y_0; x_0)$. **4.** $A(0; 0)$, $B(0; 2)$, $C(5; 2)$, $D(5; 0)$. *Указание.* Положительными координатными полуосями здесь считаются те, на которых лежат точки B и D. **5.** $A(-4; 0)$, $B(0; 3)$, $C(4; 0)$, $D(0; 3)$. **6.** $|M_1M_2| = 5$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $\alpha \approx 53°08'$. **7.** $P = 12$. **10.** $A(0; 4)$, $B(0; -12)$, $C(6 + 2\sqrt{21}; 0)$, $D(6 - 2\sqrt{21}; 0)$. **11.** $L(17; 17)$, $N(5; 5)$. **12.** $M(1{,}5; 1{,}5)$. **13.** $M(-14; 17)$. **14.** $M_1(2; -2)$, $M_2(4; -4)$. **15.** $N(2; 1)$. **16.** $S = 25$ (кв. ед.). **17.** $N_1(0; -2)$, $N_2(0; 14)$. **18.** *Указание.* Убедиться в том, что $S_{\triangle ABC} = 0$. **19.** $S = 26$ (кв. ед.). **20.** $M_1(2; 0)$, $M_2(1; \sqrt{3})$, $M_3(-1; \sqrt{3})$, $M_4(-2; 0)$, $M_5(-1; -\sqrt{3})$, $M_6(1; -\sqrt{3})$. **21.** $N(0; 2{,}9)$. **22.** $N(2; 2)$. *Указание.* Центр тяжести треугольника совпадает с точкой пересечения медиан, которая делит каждую из медиан в отношении 2 : 1, считая от вершины. **23.** $S = 35$ (кв. ед.). *Указание.* Искомая площадь равна сумме площадей трех треугольников. **24.** $y = \pm 3x$. Линии принадлежит лишь точка P. **25.** $x^2 + y^2 = 49$. На данной окружности лежит точка M, внутри окружности — точка L, вне окружности — точка N. **26.** $x^2 + y^2 = 12x$ или $(x - 6)^2 + y^2 = 36$ (окружность). **27.** $8x - 6y - 25 = 0$. **28.** $y = \frac{x^2}{4} + 1$. **29.** $A(0; -3)$, $B(5; 0)$. **30.** $A(2; 3)$, $B(-1{,}2; -3{,}4)$. **31.** $5\sqrt{2}$. **32.** $x + 2y = 0$. **33.** 1) $x = a$, $x = -a$ (прямые, параллельные оси Oy); 2) $y = b$, $y = -b$ (прямые, параллельные оси Ox); 3) $y = x$ (биссектриса первого и третьего координатных углов), $y = -x$ (биссектриса второго и четвертого координатных углов). **36.** $A'(2; \pi)$, $B'\left(8; \frac{4\pi}{3}\right)$, $C'\left(1; \frac{3\pi}{2}\right)$, $D'\left(3; \frac{7\pi}{4}\right)$. **37.** $A'\left(1; \frac{7\pi}{4}\right)$, $B'\left(7; \frac{3\pi}{2}\right)$, $C'\left(3; \frac{3\pi}{4}\right)$, $D'\left(2; \frac{\pi}{3}\right)$. **38.** $A'(1; 1)$, $B'(0; 1)$, $C'(-2; 2)$, $D'(\sqrt{3}; -1)$. **39.** $A'\left(2\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$, $B'(3; \pi)$, $C'\left(\sqrt{2}; \frac{7\pi}{4}\right)$. **40.** $\rho \sin\varphi = b$. **41.** $\rho\cos(\varphi - \alpha) = p$. **42.** $\rho = 2R\cos\varphi$. **43.** $\rho = 2R\sin\varphi$. **44.** 1) $x^2 + y^2 = R^2$; 2) $y = b$; 3) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - \rho = 0$; 4) $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0$; 5) $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a - x}$; 6) $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$. **45.** 1) $\rho + 2R\sin\varphi = 0$; 2) $\rho = 2R\cos\varphi$; 3) $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$; 4) $\rho^2 = a^2\sin^2\varphi$; 5) $\rho = a \times \sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi + \left(\frac{b^4}{a^4} - 1\right)}}$. **46.** $\rho = 2R(1 + \cos\varphi)$. **47.** $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$. *Указание.* Найти сначала уравнение линии в декартовых координатах: $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$. См. приложение **4.** **48.** $\rho = \frac{a}{\sin\varphi} + l$. *Указание.* Из чертежа (рис. 75) имеем $\rho = OK + KM$, откуда и вытекает уравнение. В декартовых координатах оно имеет вид $(x^2 + y^2)(y - a)^2 - l^2y^2 = 0$. Из этого уравнения видно, что точка (0; 0) принадлежит конхоиде. Форма конхоиды зависит от величины параметров a и l. При $l < a$ кривая имеет вид,

показанный на рис. 75, *а*; при $l = a$ и $l > a$ — вид, показанный соответственно на рис. 75, *б* и *в*. **49.** $\rho = b\sqrt{\cos 2\varphi \pm \sqrt{\cos^2 2\varphi + \left(\frac{a^4}{b^4} - 1\right)}}$; в декартовых координатах: $(x^2 + y^2)^2 - 2b^2(x^2 - y^2) = a^4 - b^4$, где b — половина расстояния между точками F_1 и F_2. *Указание.* Начало прямоугольной системы выбрать в середине отрезка $F_1F_2 = 2b$, тогда $F_1(-b; 0)$, $F_2(b; 0)$. Из условия имеем $MF_1 \cdot MF_2 = a^2$, откуда $\sqrt{(x+b)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-b)^2 + y^2} = a^2$. На рис. 76 изображены кривые для случаев $a < b$, $a > b$, $a = b$. **53.** 1) $y = -x + 4$; 2) $y = -x - 5$; 3) $y = -x + 3{,}5$; 4) $y = -x - 2{,}7$. **54.** 1) $y = x + 7$; 2) $y = \sqrt{3}\,x + 7$; 3) $y = -x + 7$; 4) $y = 7$. **55.** 1) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$; 2) $y = x$;

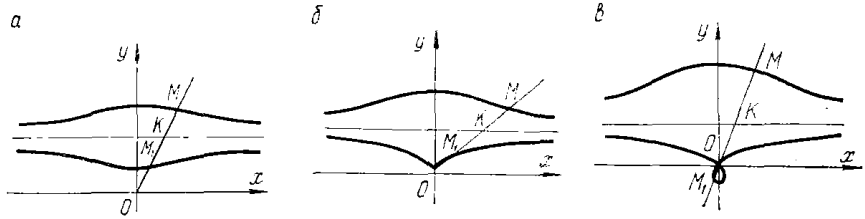


Рис. 75

3) $y = -\sqrt{3}\,x$; 4) $y = -x$. **56.** 1) $y = 5x + 3$; 2) $y = -\frac{3}{8}x$; 3) $y = \frac{7}{4}x$; 4) $y = -2x + \frac{10}{3}$; 5) $y = \frac{2}{5}x + 3$; 6) $y = 2x - 2{,}5$. **57.** 1) $\alpha = -135°$; 2) $\alpha = 45°$; 3) $\alpha = 0$; 4) $\alpha = 90°$; 5) $\alpha \approx 51°20'$; 6) $\alpha \approx 21°48'$. **58.** 1) $a = 4$, $b = 3$; 2) $a = -\frac{1}{6}$, $b = 1$; 3) $a = -3$, $b = 7$; 4) $a = 5$, $b = -4$; 5) $a = 2$, $b = 8$; 6) $a = -4$, $b = -9$. **60.** 12. **61.** 1) $4x + 7y - 28 = 0$, $4x - 7y - 28 = 0$, $4x - 7y + 28 = 0$, $4x + 7y + 28 = 0$; 2) $7x + 4y - 28 = 0$, $7x - 4y - 28 = 0$, $7x - 4y + 28 = 0$, $7x + 4y + 28 = 0$. **62.** $A = B$. **63.** $C_1 = -10$, $C_2 = 15$. **64.** 1) $B = -7$; 2) $B = 7$. **65.** $A = 8$. **66.** $b = -20$. **68.** $C = \pm 18$. **69.** $x + 3y - 6 = 0$, $x - 3y + 18 = 0$. **70.** 1) $(Ax_1 + By_1 + C) \times (Ax_2 + By_2 + C) > 0$; 2) $(Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) < 0$. **71.** Точки A и B лежат на прямой, C и D по одну сторону, E и F — по другую сторону от прямой. **72.** 1) Пересекает прямую; 2), 3) не пересекает; 4) лежит на прямой. **73.** Прямая пересекает стороны KL и KM. **74.** 1) $\varphi = 45°$; 2) $\varphi = 135°$; 3) $\varphi = 0$; 4) $\varphi = 90°$; 5) $\varphi = 30°$; 6) $\varphi = 45°$; 7) $\varphi = \operatorname{arctg} 3$, $\varphi \approx 71°34'$; 8) $\varphi = \operatorname{arctg} 0{,}5$, $\varphi \approx 26°34'$. **75.** Прямые 1) и 2) параллельны; эти прямые перпендикулярны прямой 3). **76.** $x + 11y - 47 = 0$, $11x - y - 29 = 0$. **77.** 90°, 45°, 45°. **78.** 1) $4x - 7y = 0$; 2) $x + 2y = 0$; 3) $x - 5y = 0$; $5x + y = 0$. **79.** $3x + 2y - 9 = 0$, $3x + 2y + 4 = 0$. **80.** $4x + 5y - 9 = 0$. **81.** $|PQ| = 5$, $|QR| = 5$, $|PR| = \sqrt{50}$, $\angle PQR = 90°$, $\angle QPR = \angle QRP = 45°$. **82.** 1) $x - 3 = 0$; 2) $x + y + 1 = 0$; 3) $3x - 5y - 29 = 0$; 4) $3x + y - 5 = 0$; 5) $\sqrt{3}\,x + y + 4 - 3\sqrt{3} = 0$, $y + 4 = 0$. **83.** $5x - 3y - 2 = 0$. **84.** $7x - 6y + 4 = 0$. **85.** $x + 4y - 10 = 0$, $4x - y - 6 = 0$. **86.** $x + y - 8 = 0$, $2x - 3y + 9 = 0$. *Указание.* Определив точку пересечения двух данных сторон, найдем одну из вершин параллелограмма $A(1; 1)$. Вторая вершина C определяется из условия, согласно которому точка $E(2; 3)$ является серединой отрезка AC. Через точку C провести прямые, параллельные данным. **87.** $p = 2\sqrt{13} + \sqrt{106} + 3\sqrt{10}$, $p \approx 20{,}992$, $S = 33$ (кв. ед.), $\operatorname{tg} A = \frac{11}{3}$, $\operatorname{tg} B = \frac{33}{17}$, $\operatorname{tg} C = \frac{11}{12}$; $\angle A \approx$

$\approx 74°45'$, $\angle B \approx 62°44'$, $\angle C \approx 42°31'$. **88.** $P(-3; -2)$, $Q(1; 4)$, $R(6; -5)$, $5x - 9y - 3 = 0$, $3x - y + 1 = 0$, $2x + 2y + 3 = 0$. **89.** $3x - 13y - 17 = 0$, $15x + y - 19 = 0$, $6x + 7y - 1 = 0$. **90.** $x - 1 = 0$, $y - 3 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$. **91.** $N(2; -3)$. **92.** $3x + 4y = 0$. **93.** $N(4; 4)$. **94** $x - 3y + 5 = 0$. **95.** $N(5{,}4; -0{,}6)$. **96.** $N(2; -3)$. **97.** $N(4; 2)$. **98.** $a = 8$, $b = -4$. **99.** $\varphi = 45°$. **100.** $\varphi = \operatorname{arctg} 2$, $\varphi = 63°26'$. **101.** $4x - y - 7 = 0$. **102.** $x + y - 2 = 0$. **103.** Нормальными являются уравнения 1), 4) и 5). **104.** 1) $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5} - 1 = 0$; 2) $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{5}{3} = 0$; 3) $\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 3 = 0$; 4) $-\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 3{,}5 = 0$; 5) $\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0$; 6) $\frac{2}{\sqrt{13}}x - \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{6}{\sqrt{13}} = 0$. **105.** 1) 3; 2) 4; 3) 9; 4) 4,6. **106.** 1) 1,8; 2) 0,5; 3) 4; 4) 5; 5) $\sqrt{10}$; 6) $5\sqrt{2}$. **107.** $d = 13$, $N(12; 5)$. **108.** $M(0{,}8; -0{,}16)$, $N(-0{,}8; 0{,}16)$. **109.** $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y - 40 = 0$. **110.** 2. **111.** 5. **112.** 4. **113.** $12x - 5y - 52 = 0$. **114.** $5x + 12y - 65 = 0$, $y - 5 = 0$. **115.** $x + 3y - 3 = 0$, $3x - y + 1 = 0$. **116.** $3x + 3y - 23 = 0$. **117.** $x + y = 0$. **118.** $x - 7y + 7 = 0$. **119.** $K(1; 4)$, $L(-5; 12)$. **120.** $x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$, $x + y - 11 = 0$. **121.** $2x - y - 7 = 0$, $3x - y - 13 = 0$, $y - 1 = 0$. **122.** $N(4; 1)$. **123.** $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, $\varphi \approx 53°08'$. **124.** $\varphi_1 = 45°$, $\varphi_2 = 53°08'$, $\varphi_3 = 81°52'$. **125.** $A(-3; 4)$, $B(1; 8)$, $C(0; 1)$, $|AB| = 4\sqrt{2}$, $|AC| = 3\sqrt{2}$, $|BC| = 5\sqrt{2}$, $S = 12$, $A = 90°$, $B = 53°08'$, $C = 36°52'$. **126.** $\varphi = 45°$. **127.** $x + y - 2 = 0$, $x - y - 6 = 0$. **128.** $\frac{1}{3}$. **129.** $7x + y - 19 = 0$, $16x + 13y + 53 = 0$. **130.** $3x + 5y - 12 = 0$, $3x + 5y - 50 = 0$. **131.** $2x - y - 2 = 0$, $2x - y + 4 = 0$. **132.** $x - y - 4 = 0$, $3x + y + 8 = 0$, $x + 3y = 0$; $x - y - 4 = 0$, $x + 3y + 16 = 0$, $3x + y - 8 = 0$. **133.** $3x - 7y + 24 = 0$, $7x - 3y - 24 = 0$. **134.** $A(-3; 6)$, $B(5; 2)$, $C(-5; -2)$; $2x - 5y = 0$. **135.** $x + y - 2 = 0$. **136.** $3x + 2y - 30 = 0$. **137.** $x - 7y + 7 = 0$, $x + y - 1 = 0$. **138.** $x - y = 0$, $x + y + 2 = 0$, $7x - y - 18 = 0$. **139.** $x + y + 2 = 0$; $7x - y - 26 = 0$. **140.** $x - y + 4 = 0$. **141.** $A(-4; -4)$, $B(-2; 4)$; $4x - y + 12 = 0$, $x + 2y - 6 = 0$, $2x - 5y - 12 = 0$. **142.** $9x - 2y - 16 = 0$, $9x - 7y - 26 = 0$. **143.** $A_1(-2; -1)$, $B_1(1; 4)$; $A_2(2; -5)$, $B_2(17; 20)$; $A_3(-\sqrt{14}; \sqrt{14} - 3)$, $B_3(-4\sqrt{14} +$

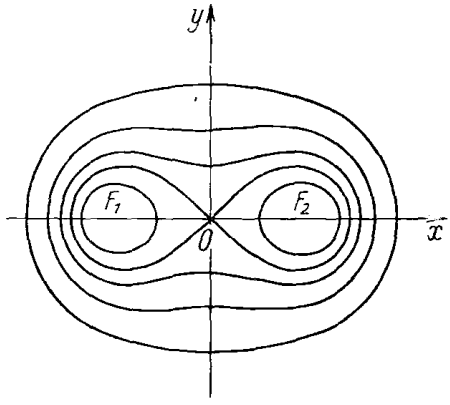


Рис. 76

$+9; -4\sqrt{14}+12)$; $A_4(\sqrt{14}; -\sqrt{14}-3)$, $B_4(4\sqrt{14}+9; 4\sqrt{14}+12)$. **144.** $A_1(-4; 5)$, $B_1(-2; -1)$, $C_1(6; 5)$; $A_2(4; 1)$, $B_2(2; 7)$, $C_2(-6; 1)$. **145.** $2x+y-13=0$, $x+8y-14=0$, $x-2y+6=0$. **146.** $x-y-1=0$, $7x-y-37=0$, $x+y-3=0$. **147.** $x-y-1=0$, $x+y-1=0$, $7x-y-31=0$. **148.** 12. **149.** 25. **150.** $x-8y-20=0$, $3x+y-10=0$, $7x-6y+10=0$. **151.** $x+2y-5=0$, $x-2y+7=0$, $3x+2y-19=0$. **152.** $5x-2y-11=0$, $x-4y-13=0$, $2x+y-8=0$. **153.** $3x-5y+14=0$, $7x+3y-26=0$, $x+2y+1=0$. **154.** $x+2y+3=0$, $2x-y-4=0$, $x+2y-17=0$, $2x-y+16=0$. **155.** $x-5y-7=0$, $5x-2y-12=0$; $113x-59y-285=0$, $13x-134y-160=0$. **156.** $(x-3)^2+(y+5)^2=100$; точки K и L лежат на окружности, точка M — в круге, точка N — вне круга, ограниченного данной окружностью. **157.** $x^2+y^2=5$; точки N и M лежат на окружности, точка K — в круге, точка L — вне круга, ограниченного данной окружностью. **158.** $(x-2)^2+(y+3)^2=25$. **159.** $(x-2)^2+(y-3)^2=4$. **160.** $(x-3)^2+(y+3)^2=20$, $(x-5)^2+(y-3)^2=20$. **161.** $(x-1)^2+(y-1)^2=13$. **162.** $(x-2)^2+(y+4)^2=10$. **163.** 1) $C(0; 5)$, $R=5$; 2) $C\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$, $R=\frac{1}{3}$; 3) $C(-2; 3)$, $R=4$; 4) $C(0{,}5; -1{,}5)$, $R=0{,}5$. **164.** 1) Уравнение не определяет действительной линии; 2) окружность радиусом $R=1$ с центром $C(1{,}5; -0{,}5)$; 3) уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки; 4) уравнению удовлетворяют координаты одной точки $M\left(-2; \frac{1}{3}\right)$. **165.** 1) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$, $(x-5)^2+(y-5)^2=25$; 2) $(x-1)^2+(y+1)^2=1$, $(x-5)^2+(y+5)^2=25$; 3) $(x+1)^2+(y-1)^2=1$, $(x+5)^2+(y-5)^2=25$; 4) $(x+1)^2+(y+1)^2=1$; $(x+5)^2+(y+5)^2=25$. **166.** 1) $(x-3)^2+(y-1)^2=1$, $(x-7)^2+(y-5)^2=25$; 2) $(x+3)^2+(y-1)^2=1$, $(x+7)^2+(y-5)^2=25$; 3) $(x+3)^2+(y+1)^2=1$, $(x+7)^2+(y+5)^2=25$; 4) $(x-3)^2+(y+1)^2=1$, $(x-7)^2+(y+5)^2=25$. **167.** 1) $(x-4)^2+y^2=8$, $(x-20)^2+y^2=400$; 2) $x^2+(y-16)^2=18$, $x^2+(y-30)^2=450$; 3) $(x+4)^2+y^2=8$, $(x+20)^2+y^2=400$. **168.** 1) Прямая проходит вне окружности; 2) прямая касается окружности; 3) прямая пересекает окружность в двух точках. **169.** $M(3; 2)$, $N(4; 1)$. **170.** $M(1; 2)$, $N(2; 1)$. **171.** 5. **172.** $\sqrt{2}$. **173.** $x-y+5=0$. **174.** 1) Половина дуги окружности радиусом $R=1$ с центром в начале координат, лежащая выше оси Ox; 2) половина дуги окружности радиусом $R=2$ с центром в точке $O(0; 0)$, лежащая ниже оси Ox; 3) половина дуги окружности радиусом $R=3$ с центром в точке $O(0; 0)$, лежащая справа от оси Oy; 4) половина дуги окружности радиусом $R=5$ с центром в точке $O(0; 0)$, лежащая слева от оси Oy. **175.** 1) Совокупность внутренних точек круга радиусом $R=5$ с центром в начале координат, лежащих кверху от прямой $y=3$; 2) множество внутренних точек круга радиусом $R=4$ с центром в начале координат, лежащих слева от прямой $x=-1$; 3) множество внутренних точек круга радиусом $R=1$ с центром в начале координат, лежащих в первой четверти (точки, лежащие на координатных осях, этому множеству не принадлежат). **176.** 1) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1$; 2) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{7}=1$; 3) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; 4) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **177.** 1) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$; 2) $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$; 3) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; 4) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$. **178.** $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$. Линии принадлежат точки K и M. **179.** $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$. **180.** 1) $a=4$, $b=2$, $F_1(-2\sqrt{3}; 0)$, $F_2(2\sqrt{3}, 0)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $a=9$, $b=3$, $F_1(-6\sqrt{2}; 0)$, $F_2(6\sqrt{2}; 0)$, $\varepsilon=\frac{2\sqrt{2}}{3}$;

3) $a=2$, $b=\sqrt{2}$; $F_1(-\sqrt{2};\ 0)$, $F_2(\sqrt{2};\ 0)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $a=2$, $b=\sqrt{\frac{3}{5}}$, $F_1\left(-2\sqrt{\frac{2}{5}};\ 0\right)$, $F_2\left(2\sqrt{\frac{2}{5}};\ 0\right)$, $\varepsilon=\sqrt{\frac{2}{5}}$; 5) $a=2$, $b=4$, $F_1(0;\ -2\sqrt{3})$, $F_2(0;\ 2\sqrt{3})$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Указание.* Если $a<b$, то фокусы находятся на оси Oy, при этом $c=\sqrt{b^2-a^2}$, $\varepsilon=\frac{c}{b}$; 6) $a=2$, $b=\sqrt{5}$, $F_1(0;\ -1)$, $F_2(0;\ 2)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{5}$. **181.** $\frac{e}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$. **182.** $M(-3;\ 2)$. **183.** 1) Одну; 2) ни одной; 3) две. **184.** $x=\pm 9$. **185.** 8. **186.** $3\sqrt{2}$. **187.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. **188.** $x+2y-3=0$. **189.** Эллипс. *Указание.* Принять за оси координат стороны прямого угла, выразить координаты точки M через длины частей отрезка $AM=a$, $MB=b$ и угол φ_1, образуемый отрезком с осью Oy. **190.** $a=150\,000\,000$ км, $\varepsilon=\frac{1}{60}$. **191.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$, $r_1=\frac{41}{5}$, $r_2=\frac{9}{5}$. **192.** $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. **193.** $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. **194.** $M(3;\ 2)$, $N(-3;\ -2)$. **195.** $2\sqrt{13}$. **196.** $M\left(\frac{5}{2\sqrt{2}};\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$, $N\left(\frac{5}{2\sqrt{2}};\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$, $K\left(-\frac{5}{2\sqrt{2}};\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$, $L\left(-\frac{5}{2\sqrt{2}};\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$. **197.** $x-2y-8=0$. **198.** $K(2;\ 1)$, $L(-2;\ 1)$, $M(-2;\ -1)$, $N(2;\ -1)$. **199.** 1) Половина дуги эллипса $16x^2+y^2=16$, лежащая кверху от оси Ox; 4) половина дуги эллипса $x^2+4y^2=4$, лежащая слева от оси Oy. **200.** 1) Множество точек, лежащих в области, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, справа от прямой $x=2$; 2) множество точек, лежащих вне эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ и внутри круга, ограниченного окружностью $x^2+y^2=25$. **201.** $\varepsilon=1-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **203.** 1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{40}=1$; 2) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{80}=1$; 3) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$; 4) $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$. **204.** 1) $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$; 2) $-\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{16}=1$; 3) $-\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$; 4) $-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$. **205.** $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$. **206.** $-\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. **207.** 1) $a=2\sqrt{2}$, $b=2$, $F_1(-2\sqrt{3};\ 0)$, $F_2(2\sqrt{3};\ 0)$, $\varepsilon=\sqrt{1{,}5}$; 2) $a=2\sqrt{3}$, $b=2$, $F_1(0;\ -4)$, $F_2(0;\ 4)$, $\varepsilon=2$; 3) $a=2$, $b=\sqrt{3}$, $F_1(-\sqrt{7};\ 0)$, $F_2(\sqrt{7};\ 0)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{7}}{2}$; 4) $a=2$, $b=\sqrt{5}$, $F_1(0;\ -3)$, $F_2(0;\ 3)$, $\varepsilon=1{,}5$; 5) $a=5$, $b=12$, $F_1(-13;\ 0)$, $F_2(13;\ 0)$, $\varepsilon=2{,}6$; 6) $a=3$, $b=4$, $F_1(0;\ -5)$, $F_2(0;\ 5)$, $\varepsilon=\frac{5}{3}$. **209.** $r_1=13$, $r_2=7$, $M_1(9;\ 8\sqrt{2})$, $M_2(9;\ -8\sqrt{2})$, $M_3(12{,}6;\ -3{,}2)$, $M_4(12{,}6;\ 3{,}2)$. **210.** $3x^2-y^2=12$. **211.** $\varepsilon\cos\frac{\alpha}{2}=1$. **212.**

$7x^2 - 3y^2 = 210$. **213.** $\varepsilon = 3$. **214.** $\operatorname{tg}\varphi = \frac{24}{7}$, $\varphi \approx 73°45'$. **215.** $9x^2 - 16y^2 = 576$. **216.** 1) Не пересекает; 2) касается; 3) пересекает в двух точках. **217.** $M(6; 2)$, $N(-6; -2)$. **218.** $4\sqrt{2}$. **219.** $K(4\sqrt{0{,}4}; 6\sqrt{0{,}2})$, $L(4\sqrt{0{,}4}; -6\sqrt{0{,}2})$, $M(-4\sqrt{0{,}4}; 6\sqrt{0{,}2})$, $N(-4\sqrt{0{,}4}; -6\sqrt{0{,}2})$. **220.** $K(4; 3)$, $L(4; -3)$, $M(-4; 3)$, $N(-4; -3)$. **221.** $P = 20$, $S = 96$. **222.** 10. **223.** $x + y - 1 = 0$. **224.** $2x - y - 2 = 0$. **225.** 1) Половины ветвей равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = 16$, лежащие выше оси Oy; 3) ветвь равносторонней гиперболы $y^2 - x^2 = 25$, лежащая ниже оси Ox; 5) ветвь гиперболы $9x^2 - 4y^2 = 36$, лежащая справа от оси Oy. **226.** 1) Множество точек, лежащих в первой четверти между полуветвью гиперболы и лучом, исходящим из точки $A(3; 0)$ в направлении оси Ox; 3) множество внутренних точек круга, ограниченного окружностью $x^2 + y^2 = 16$, лежащих справа от правой ветви гиперболы $x^2 - y^2 = 4$ и слева от левой ветви той же гиперболы; 5) множество точек между прямыми $x = 3$, $x = 5$, ограниченное правой ветвью гиперболы $x^2 - y^2 = 9$. **229.** 1) $y^2 = 9x$; 2) $x^2 = -4y$. **230.** $y^2 = 16x + 16$, $L(0; -4)$, $M(0; 4)$, $N(-1; 0)$. **231.** $y^2 = 8(x - 1)$. **232.** $x^2 = 9(y - 3)$. **233.** 1) $y^2 = 10x - 25$; 2) $x^2 = 10y - 25$. **234.** 1) $F(1{,}5; 0)$, $x = -1{,}5$; 2) $F(-1{,}5; 0)$, $x = 1{,}5$. **235.** $M(1; 4)$, $N(1; -4)$. **236.** $x^2 = -6y$. **237.** $y^2 = -32x$. **238.** 10. **239.** $M(1; 0{,}25)$, $N(3; 2{,}25)$. **240.** $x - y + 3 = 0$. **241.** $x - 4y + 8 = 0$. **242.** $x + y + 1 = 0$, $x + 3y + 9 = 0$. **243.** $3\sqrt{5}$. **244.** 10 см от вершины. **245.** $y^2 = 4x$. **246.** 1) $M(3; 4)$, $N(3; -4)$; 2) $M(3; 4)$, $N(-3; 4)$. **247.** 12. **248.** $M(2; 1)$, $N(-2; 1)$. **249.** $(x - 2)^2 + y^2 = 1$. **250.** $M(5; 2)$, $N(5; -2)$. **251.** 8. **252.** $O(0; 0)$, $M(2; 1)$. **253.** 1) Дуга параболы $y^2 = x$, расположенная выше оси Ox; 3) дуга параболы $x^2 = y$, расположенная слева от оси Oy. **254.** 1) Множество точек конечной части плоскости, ограниченной параболой $x^2 = 4y$ и прямой $x = 3$. **257.** $C(1; 0{,}5)$, $R = \frac{\sqrt{65}}{2}$. **259.** Эллипс с полуосями $a = 3$, $b = 2$ и центром в точке $O_1(1; 1)$. **260.** Эллипс с полуосями $a = 2$, $b = 4$ и центром в точке $O_1(-2; 3)$. **261.** Гипербола, пересекающая ось Ox, для которой $a = 3$, $b = 2$; $O_1(2; -3)$. **262.** Гипербола, пересекающая ось Oy, для которой $a = \sqrt{2}$, $b = 2$; $O_1(-5; -1)$. **263.** Гипербола $XY = 8$, где $X = x - 2$, $Y = y + 5$; асимптоты ее параллельны старым координатным осям; $O_1(2; -5)$. **264.** Гипербола $XY = -6$ с центром в точке $O_1(-3; 4)$. **265.** Гипербола $XY = -1$ с центром в точке $O_1(-2; 1)$. **266.** Гипербола $XY = 6$ с центром в точке $O_1(1; 4)$. **267.** Парабола $Y^2 = 4X$, где $X = x - 3$, $Y = y - 1$, вершина в точке $O_1(3; 1)$. **268.** Парабола $Y^2 = -6X$, где $X = x + 1$, $Y = y + 2$, вершина в точке $O_1(-1; -2)$. **269.** Парабола $X^2 = 8Y$ с вершиной в точке $O_1(-1; 2)$. **270.** Парабола $X^2 = -10Y$ с вершиной в точке $O_1(3; -2)$. **271.** Пара пересекающихся прямых, определяемых уравнениями $x - y + 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$. **272.** Пара параллельных прямых $x - y - 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$. **273.** Пара совпавших прямых $x + y + 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$. **274.** Пара пересекающихся прямых $x - 2 = 0$, $y + 3 = 0$. **275.** Пара прямых, параллельных оси Oy, $x - 3 = 0$, $x + 2 = 0$. **276.** Пара прямых, параллельных оси Ox, $y + 1 = 0$, $y + 4 = 0$. **277.** Окружность радиусом $R = 5$ с центром в точке $S(-4; 6)$. **278.** Окружность радиусом $R = 3$ с центром в точке $S(2{,}5; -1{,}5)$. **279.** Уравнение действительной линии не определяет. **280.** Уравнению удовлетворяют координаты единственной точки $M(-2; 1)$. **281.** Эллипс с полуосями $a = 3$, $b = 2$ и центром в точке $O_1(1; -1)$. **282.** Гипербола, пересекающая ось Oy, с полуосями $a = 2$, $b = 3$; $O_1(-1; -2)$. **283.** Парабола $Y^2 = 4X$ с вершиной в точке $O_1(2; -3)$. **284.** Пара параллельных прямых $x + y - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$. **285.** $\frac{X^2}{8} + \frac{Y^2}{2} = 1$ или $X^2 + 4Y^2 = 8$; $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $O'(1; -1)$. **286.** $X^2 + 4Y^2 = 4$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $O'(3; 1)$. **287.** $X^2 + 2Y^2 = 2$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $O'(1; -1)$. **288.** $X^2 - 4Y^2 = 8$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $O'(1; 1)$. **289.** $4X^2 - 8Y^2 = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $O'(1{,}75; 1{,}25)$. **290.** $3X^2 - Y^2 = -3$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $O'(2; 2)$.

291. $Y^2=\frac{1}{5}X$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $O'(0;\ 0)$. **292.** $Y=-X^2$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$, $O'(0;\ 0)$. **293.** $X^2+2Y^2=2$, $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha=2$, $O'(1;\ -1)$. **294.** $2Y^2-X^2=2$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}$, $O'(0;\ 1)$. **295.** $3x^2+y^2=3$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O'(-2;\ 3)$. **296.** $5X^2+Y^2=5$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O'(2;\ -2)$. **297.** $Y^2-5X^2=5$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O'(-1;\ -2)$. **298.** $Y^2=\sqrt{2}X$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O'(1;\ -1)$. **299.** $X^2+6Y^2=6$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O'(2;\ 1)$. **300.** $X^2-6Y^2=6$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O'(1;\ -1)$. **301.** $X^2=-4\sqrt{2}Y$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O'(-1;\ 1)$. **302.** $Y^2-7X^2=7$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O'(2;\ -2)$. **303.** $Y^2=\frac{4}{\sqrt{5}}X$, $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha=2$, $O'(-1;\ -1)$. **304.** $X^2+9Y^2=9$, $\operatorname{tg}\alpha=-1$, $O'(1;\ -1)$. **305.** $Y^2-9X^2=9$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O'(1;\ -1)$. **306.** $Y^2=\frac{1}{\sqrt{5}}X$, $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $O'(2;\ -1)$. **307.** $X^2-8Y^2=8$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O'(-2;\ -1)$. **308.** $X^2=\frac{3}{\sqrt{5}}Y$, $\operatorname{tg}\alpha=2$. **309.** $X^2+3Y^2=3$, $\operatorname{tg}\alpha=1$, $O'(-2;\ -1)$. **310.** $2X^2+Y^2=2$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $O'(1;\ 1)$. **311.** $X^2=\frac{18}{5\sqrt{5}}Y$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $O'\left(-\frac{4}{75};\ -\frac{37}{75}\right)$. **312.** $4X^2-16Y^2=17{,}5$, $O'(-1;\ 0)$. **313.** $x+y-1=0$, $x+y-1=0$. **314.** $X^2-Y^2=8$, $X=x-2$, $Y=y$, $O'(2;\ 0)$. **315.** $x-y-3=0$, $x-y+3=0$. **316.** 1) Сегмент $[-4;\ 4]$. *Указание.* $4^2-x^2\geqslant 0$, $x^2\leqslant 4^2$, $-4\leqslant x\leqslant 4$; 2) интервал $]-4;\ 4[$; 3) совокупность двух полуинтервалов $]-\infty;\ -5]$, $[5;\ +\infty[$; 4) сегмент $[-4;\ 3]$. **317.** 1) $]-3;\ +\infty[$; 2) $[-1;\ 1]$. **318.** 1) $]-\infty;\ +\infty[$; 2) $]-\infty;\ +\infty[$. **319.** 1) 4; 2; 2; 4; x^2+x+2; $(2x^2-x+1)\cdot\frac{1}{x^2}$; $(x+h)^2-(x+h)+2$. **320.** 1) $2x^2-4x+3$; 2) $3x^2-4x+6$; 3) $3x^2-4x-1$; 4) $4x^2+2x+5$. **328.** Функция определена при всех x, т. е. в интервале $]-\infty;\ +\infty[$. **329.** $]-\infty;\ \infty[$. **330—333.** *Указание.* См. определение модуля § 1. **334.** См. приложение. **335.** См. указание к задаче 334. **336.** $y=\frac{b}{h}(h-x)$, $]0;\ h[$. **337.** $\sin^2 x$; $\sin x^2$. **338.** $\cos^3 x$, $\cos x^3$. **339.** 1) $x=\frac{y+4}{3}$; 2) $x=+\sqrt{1-y^2}$; $x=-\sqrt{1-y^2}$; 3) $x=\log_2 y$; 4) $x=3\arccos y$. **340.** 1) $-2<x<2$; 2) $-5<x<3$; 3) $-3<x<7$; 4) $-10<x<4$. **342.** $N_1=10\,000$, $N_2=100$, $N_3=10$. **343.** 23. **344.** -4. **345.** 3. **346.** 1. **347.** 1. **348.** $\frac{1}{27}$. **349.** 4. **350.** 3. **351.** $\frac{1}{2}$. **352.** 1. **353.** -2. **354.** 2. **355.** 0. **356.** ∞. **357.** *Указание.* Числитель и знаменатель разделить на x^m. **358.** 1. *Указание.* Числитель и знаменатель разделить на n. **359.** 3. **360.** -1. **361.** -40. **362.** 6. **363.** $-\frac{1}{16}$. **364.** 7. **365.** $\frac{1}{5}$. **366.** 1. **367.** 2. **368.** $\frac{1}{9}$. **369.** 8. **370.** 2. **371.** 30. **372.** $\frac{1}{6}$. **373.** $\frac{1}{2}$. **374.** 1. **375.** $-\frac{1}{2}$. **376.** $2\cos x$. **377.** $-2\sin x$. **378.** e^{-2}. **379.** $\sqrt{e}$. **380.** e^5.

381. e^{-3}. **382.** e^{-4}. **383.** e^2. **384.** $\frac{1}{2}$. **385.** $-\frac{1}{3}$. *Указание.* Положить $e^x - 1 = \alpha$. **386.** 4. **387.** -1. **388.** $-\frac{3}{2}$. **389.** 0. **390.** $\frac{1}{6}$. **391.** $-\frac{1}{8}$. **392.** $\frac{2}{\pi}$. **393.** $\frac{4}{\pi}$. **394.** 2. **395.** 4. **396.** $-\frac{1}{4}$. **397.** $\frac{1}{2}$. **398.** $\frac{1}{36}$. **399.** $\frac{3}{2}$. **400.** $\frac{1}{3}$. **401.** $\frac{4}{3}$. **402.** $-\frac{1}{2}$. **403.** 3. **404.** e^3. **405.** e^2. **406.** $e^{-\frac{1}{2}}$. *Указание.* Положить $\cos^2 x = \alpha$. **407.** $\frac{1}{\sqrt{e}}$. *Указание.* Положить $\sin^2 2x = \alpha$. **408.** $\Delta x = \frac{\pi}{2}$, $\Delta y = 1$. **409.** $\Delta x = \frac{\pi}{2}$, $\Delta y = -1$. **410.** $\Delta y = \Delta x (2x_0 + \Delta x)$. **411.** 6,25. **413.** *Указание.* Воспользоваться свойствами непрерывных функций и тем, что функция $y = x^n$ непрерывна. **414.** *Указание.* См. пример 3 § 19. **415.** *Указание.* Воспользоваться свойством непрерывности сложной функции. **416.** 1) $y' = 10x$; 2) $y' = (x-1)^3$. **417.** 1) $\frac{4x^3}{a}$; 2) $5ax^4 + 3bx^2 + c$. **418.** 1) $-\frac{4}{x^5}$; 2) $-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6}$. **419.** 1) $-\frac{3a}{x^4}$; 2) $-\frac{4a}{x^5} + \frac{6b}{x^7} - \frac{2c}{x^3}$. **420.** 1) $\frac{4}{5}\sqrt[5]{\frac{10}{x}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt[4]{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$. **421.** 1) $-\frac{1}{\sqrt{5x^5}}$; 2) $\frac{4d}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2c}{3x\sqrt[3]{x^2}}$. **422.** 1) $\cos x + \sin x$; 2) $-\operatorname{ctg}^2 x$. **423.** 1) $\sin x + x\cos x$; 2) $x\sin x$. **424.** 1) $x(2\cos x - x\sin x)$; 2) $8\sin^2 x$. **425.** 1) $\frac{1}{2}\sin^2 x$; 2) $x^2\cos x$. **426.** 1) $\frac{x + \sin x\cos x}{\cos^2 x}$; 2) $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$; 3) $-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$. **427.** 1) $-\frac{4}{(2+x)^2}$; 2) $\frac{2ab}{(ax+b)^2}$. **428.** 1) $\frac{6x}{(x^2+1)^2}$; 2) $\frac{4a^2x}{(x^2+a^2)^2}$. **429.** 1) $\frac{3(1-2x^2)}{(1+2x^2)^2}$; 2) $-\frac{4x^2 - 10x + 7}{(x^2 - 3x + 2)^2}$. **430.** 1) $\frac{x^2\cos x - x\sin x - \cos x}{x^2}$; 2) $\frac{2(\cos x + x\sin x)}{(x+\cos x)^2}$. **431.** 1) $s'_t = 2at + b$; 2) $x'_t = a\cos t$. **432.** 1) $y' = 1 + \frac{1}{t^2}$; $u'_v = 2(v+1)$. **433.** 1) $x'_y = b$; 2) $x'_y = y\cos y$; 3) $x'_t = \frac{t^2}{(t\sin t + \cos t)^2}$. **434.** $f'(x) = 2x - 5$; $f'(0) = -5$, $f'(1) = -3$, $f'(4) = 3$, $f'(-2) = -9$. **435.** $r'(\varphi) = \cos\varphi - \sin\varphi$; $r'(0) = 1$, $r'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $r'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $r' \times \left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$. **436.** $s'(t) = 3t^2 - 2t$; $s'(0) = 0$, $s'(1) = 1$, $s'(2) = 8$, $s'(-2) = 16$. **437.** $-4\sin 4x$. **438.** $\frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}$. **439.** $\sin 2x$. **440.** $-3\cos^2 x\sin x$. **441.** $-\sin 4x$. **442.** $18x(3x^2 - 5)^2$. **443.** $-\frac{2a}{(ax+b)^3}$. **444.** $\frac{2x^3 + 1}{\sqrt{x^4 + 2x + 3}}$. **445.** $\frac{8}{3\sqrt[3]{4x-5}}$. **446.** $\frac{ax}{\sqrt{ax^2 + b^2}}$. **447.** $\frac{-a}{2\sqrt{b^2 - ax}}$. **448.**

$4x(x^2+a^2)$. **449.** $-6cx(a^2-cx^2)^2$. **450.** $\frac{1+2\cos 4x}{\sqrt{2x+\sin 4x}}$. **451.** $\frac{-\sin 2x}{3\sqrt[3]{(1+\cos^2 x)^2}}$.

452. $\frac{-6\cos 2x}{(1+\sin 2x)^4}$. **453.** $\frac{-2(1-3\sin 3x)}{(x+\cos 3x)^3}$. **454.** $-\frac{\sin 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. **455.** $-\operatorname{cosec}^6 x$. **456.** $3\operatorname{ctg}^4 x$. **457.** $-2\cos 4x$. **458.** $-2x\sin 2x^2$. **459.** $\frac{5x^2+8x}{\sqrt{2x+4}}$. **460.** $\frac{4x^4-3x^2}{\sqrt{x^2-1}}$. **461.** $\frac{2x+6}{\sqrt{(2x+5)^3}}$. **462.** $\frac{acx+2ad-cb}{2\sqrt{(cx+d)^3}}$. **463.** $\frac{a}{2}\sin\frac{t}{2}$. **464.** $a\sin^2\frac{t}{4}$. **465.** $\frac{a(1+2\cos 2\varphi)}{2\sqrt{\varphi+\sin 2\varphi}}$. **466.** $3a\sec^2 3\varphi$. **467.** $\frac{1}{x\ln 10}$. **468.** $\frac{2x}{(x^2+a^2)\ln 10}$. **469.** $\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$. **470.** $\frac{1-\ln x}{x^2}$. **471.** $x(2\ln x+1)$. **472.** $\frac{2x+5}{x^2+5x+6}$. **473.** $\frac{2x}{x^2+a^2}$. **474.** $\frac{2}{x+a}$. **475.** $\frac{2}{x^2-1}$. **476.** $\frac{2a}{x^2-a^2}$. **477.** $\frac{x}{x^2+a^2}$. **478.** $\frac{ab}{b^2x^2-a^2}$. **479.** $\frac{1}{x\ln x}$. **480.** $\frac{2\ln x}{x}$. **481.** $4^x\cdot 2\ln 2+4x^3$. **482.** $3\ln 5\cdot 5^{3x}+15(3x)^4$. **483.** $2\cos 2xe^{\sin 2x}$. **484.** $-\frac{1}{3}e^{\cos\frac{x}{3}}\times\sin\frac{x}{3}$. **485.** $\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}})$. **486.** $\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}})$. **487.** $2xe^{x^2}$. **488.** $-3x^2e^{-x^3}$. **489.** $\frac{\ln a}{4}a^{\sin\frac{x}{4}}\cos\frac{x}{4}$. **490.** $a^{\sin^2 x}\sin 2x\ln a$. **491.** $\frac{4e^x}{(1-2e^x)^2}$. **492.** $\frac{2abe^x}{(a-be^x)^2}$. **493.** $1-\frac{2bx}{bx^2+c}$. **494.** $\frac{4}{e^{-2x}-e^{2x}}$. **495.** $\frac{8}{\sqrt{1-64x^2}}$. **496.** $-\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$. **497.** $-\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$. **498.** $\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$. **499.** $\frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$. **500.** $\frac{-1}{\sqrt{2x-4x^2}}$. **501.** $-\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$. **502.** $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$. **503.** $-\frac{a}{a^2+x^2}$. **504.** $\frac{1}{2\sqrt{4x^3-x^2}}$. **505.** $-\frac{1}{x^2+1}$. **506.** $\frac{1}{x^2+1}$. **507.** $-\frac{1+2x\operatorname{arcctg} x}{(1+x^2)^2}$. **508.** $1+2x\operatorname{arctg} x$. **509.** $-\frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}$. **510.** $-\frac{2x}{1+x^4}$. **511.** $\frac{x-2y}{2x-y}$. **512.** $-\frac{y^2+2xy}{x^2+2xy}$. **513.** $-\frac{y}{x+\cos y}$. **514.** $\frac{b^2x}{a^2y}$. **515.** $\frac{1}{1-e^y}$. **516.** $-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$. **517.** $2y$. **518.** $\frac{x(1-2x^2)}{y}$. **519.** 0. **520.** -1. **521.** $4(3x^2-1)$. **522.** $4a(3ax^2-b)$. **523.** $a^x\ln^2 a$. **524.** $-\frac{1}{x^2}$. **525.** $\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$. **526.** $\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$. **527.** $a\cos\varphi$. **528.** $-a\sin\varphi$. **529.** $-64a\cos 4t$. **530.** $27a\sin 3t$. **531.** -24; 96; -144. **532.** 0; 240; 480. **533.** $\frac{\sin t+t\cos t}{\cos t-t\sin t}$. **534.** $-\operatorname{ctg} 2u$. **535.** $-\operatorname{tg} u$. **536.** $\operatorname{ctg}^2 t$. **537.** 2. **538.**

$\frac{5b}{3a}$. **539.** 0. **540.** $-\frac{\cos t}{a\sin^3 t}$. **541** $-\frac{1}{a(1-\cos t)^2}$. **542.** $\frac{t^2+1}{2at}$

543. $u^v\left(v'\ln u+\frac{v}{u}u'\right)$. Решение. Логарифмируя равенство $y=u^v$, получаем $\ln y=v\ln u$. Дифференцируя обе части этого равенства, находим $\frac{1}{y}y'=v'\ln u+v\frac{1}{u}u'$, откуда $y'=y\left(v'\ln u+\frac{v}{u}u'\right)$. Подставив сюда выражение для y, получим искомую формулу. **544.** $x^{\cos x}\left(-\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)$

545. $(\sin x)^x(\ln\sin x+x\operatorname{ctg}x)$. **546.** $x^{\sqrt{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$. **547.** $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\times$

$\times\left(1+\frac{1}{2}\ln x\right)$. **548.** $(\operatorname{arcctg}x)^x\left[\ln(\operatorname{arcctg}x)-\frac{x}{\operatorname{arcctg}x}\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\right]$.

549. $(\sin x)^{\cos x}(-\sin x\ln\sin x+\cos x\operatorname{ctg}x)$. **553.** $-\frac{2x^2-6x-27}{(x^2+5x+6)^2}$. **554.** $\cos^2 x$.

555. $\cos^3 x$. **556.** $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$. **557.** $\frac{2\sin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}{(1+x)^2}$. **558.** $\frac{3}{1+\cos 3x}$.

559. $\frac{1}{2}\cos\sqrt{x}$. **560.** $\frac{1}{\sin^4 x}$. **561.** $-\frac{1}{\sin 2x}$. **562.** $\frac{2x}{\cos^2 x^2}$.

563. $\frac{1}{1+\sin x}$. **564.** $\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. **565.** $\frac{1}{x\sqrt{x^2+2x-1}}$. **566.** $-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

567. $\frac{1}{\sqrt{2x-4x^2}}$. **568.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **569.** $\frac{1}{2(1+x^2)}$. **570.** $e^{\sin^3 x}3\sin^2 x\cos x$.

571. $4xe^{2x}$. **572.** $\frac{1}{\cos x}$. **573.** $\frac{1}{\cos x}$. **574.** $\frac{4x}{x^4-1}$. **575.** $-2\operatorname{tg}x$.

576. $\frac{1}{x(x^2+1)}$. **577.** $\frac{4a^2x}{x^4-a^4}$. **578.** $e^x x^3$. **579.** $-\frac{x^2}{(\sin x-x\cos x)^2}$.

580. $dy=3(x+1)^2\,dx$. **581.** $(x+1)^4\,dx$. **582.** $4ax(ax^2-b)\,dx$.

583. $3a(ax+b)^2\,dx$. **584.** $-\frac{1}{(1+x)^2}dx$. **585.** $\frac{2}{x^3}dx$. **586.** $2\sin 4x\,dx$.

587. $\frac{4\operatorname{tg}2x}{\cos^2 2x}dx$. **588.** $-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$. **589.** $\frac{3x^2+12x}{2\sqrt{x^3+6x^2}}dx$.

590. $-3\ln a\cdot a^{\cos 3x}\sin 3x\,dx$. **591.** $4e^{\sin 4x}\cos 4x\,dx$. **592.** $\frac{2x\,dx}{x^2+a^2}$.

593. $\frac{2\ln x\,dx}{x}$. **594.** $(\sin\varphi+\varphi\cos\varphi)\,d\varphi$. **595.** $dr=-\varphi\sin\varphi\,d\varphi$.

596. $-3a\sin t\cos^2 t\,dt$. **597.** $3b\sin^2 t\cos t\,dt$. **598.** $4(2t-t^2)(1-t)\,dt$.
599. $6t(t^2-1)^2\,dt$. **600.** 1) 19; 8; 2) 0,864; 0,8. **601.** $-0{,}12$. **602.** 4 см^2.
603. 1) 0,515. *Указание.* Выразить $x=\text{arc }30^\circ$ и $\Delta x=\text{arc }1^\circ$ в радианной мере; 2) 0,81; 3) 1,2; 4) 0,01. **604.** $4x+y-6=0$, $x-4y+7=0$.
605. $2x+3y-12=0$, $3x-2y-5=0$. **606.** $x-y-1=0$, $x+y-3=0$.
607. $x+y-2=0$, $x-y=0$. **608.** $M_1(-2;-8)$, $M_2(2;8)$. **609.** $M(3;2)$.
610. $\varphi=\operatorname{arctg}4$, $\varphi\approx 75^\circ 57''$. **611.** 135°, 45°. **612.** $\varphi=\operatorname{arctg}3$; $\varphi\approx 71^\circ 34'$.
616. $k=\frac{1}{a}$. **617.** $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$. **618.** $M(1;0{,}5)$, $N(-1;0{,}5)$. **619.** $t_1=2$, $t_2=4$.
620. $k(A-x)$. **621.** Убывает в интервале $]-\infty;-4[$, возрастает в промежут-

ке $]-4;\ +\infty[$. **622.** Возрастает при $-\infty<x<1$, убывает при $-1<x<+\infty$. **623.** В интервалах $]-\infty;\ -1[$, $]1;\ +\infty[$ возрастает, в интервале $]-1;\ 1[$ убывает. **624.** Убывает в промежутках $]-\infty;\ -2[$ и $]0;\ +\infty[$, возрастает в промежутке $]-2;\ 0[$. **625.** Возрастает в промежутке $]0;\ +\infty[$. **626.** Возрастает в промежутке $]-\infty;\ +\infty[$. **627.** Убывает в интервалах $]-\infty;\ -1[$ и $]0;\ 1[$, возрастает в интервалах $]-1;\ 0[$, $]1;\ +\infty[$. **628.** Возрастает в интервалах $]-\infty;\ -\sqrt{2}[$, $]0;\ \sqrt{2}[$, убывает в интервалах $]-\sqrt{2};\ 0[$, $]\sqrt{2};\ +\infty[$. **629.** Наибольшее значение равно 0, наименьшее — (— 4). *Указание.* Наибольшим значением функции называется самое большое, а наименьшим — самое меньшее из всех значений. Наибольшее или наименьшее значение на отрезке функция может принимать или в точках экстремума, или на концах этого отрезка. **630.** 8; —8. **631.** $1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}$; $0=y(0)$. **632.** $1=y(0)$; $0=\lim\limits_{x\to\infty}\times$ $\times\dfrac{1}{1+x^2}$. **633.** $y_{\max}=y(-1)=0$, $y_{\min}=y(1)=-4$. **634.** $y_{\min}=y(-1)=-2$, $y_{\max}=y(-3)=2$. **635.** $y_{\max}=y(0)=9$, $y_{\min}=y(-\sqrt{3})=y(\sqrt{3})=0$. **636.** $y_{\max}=y(0)=\dfrac{1}{4}$, $y_{\min}=y(-1)=y(1)=0$. **637.** $y_{\min}=y(0)=a$. **638.** Экстремума нет. **639.** $y_{\min}=y(e^{-1})=-e^{-1}$, $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=0$, $y=0$ при $x=1$. **640.** $y_{\max}=y(e)=\dfrac{1}{e}\approx 0{,}37$; $y=0$ при $x=1$. Асимптоты: $x=0$, $y=0$. **641.** $M_1(0;\ 2)$; $M_2\left(\dfrac{4}{3};\ \dfrac{22}{27}\right)$. **642.** $O(0;\ 0)$, $N(-2;\ -4)$. **643.** $x=y=\dfrac{a}{2}$ (квадрат). **644.** Равнобедренный. **645.** 20 см. **646.** Стороны прямоугольника: $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$, где a и b—полуоси эллипса. **647.** Высота цилиндрической формы должна быть равна нулю, т. е. сосуд должен иметь форму полусферы. **648.** $h=(l^{\frac{2}{3}}-d^{\frac{2}{3}})^{2/3}$. **649.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{m}$ $\left(\text{при условии, что } \dfrac{1}{m}\leqslant\dfrac{a}{AB},\right.$ $\left.\text{где } a\text{—проекция на направление железной дороги}\right)$. **650.** $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$. **651.** $x=-7$. **652.** $x=-5$, $x=5$. **653.** $y=x-4$, $x=0$. **654.** $x=1$, $x=3$. **655.** $y=x$, $x=-1$. **656.** $x=5$, $x=-5$, $y=0$. **657.** 2) Определена при всех x, $x=-2$—точка максимума, $y_{\max}=y(-2)=16$, $x=2$—точка минимума, $y_{\min}=y(2)=-16$. **658.** 2) Определена при всех x, $y_{\max}=y(1)=7$, $y_{\min}=y(3)=3$. **659.** 1) Определена при всех x, $y_{\max}=y(0)=4$, $y_{\min}=y\left(\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right)=-\dfrac{9}{4}$. **660.** 1) $y_{\min}=y(-\sqrt{2})=y(\sqrt{2})=1$, $y_{\max}=y(0)=5$. **661.** 2) Область определения состоит из трех интервалов: $]-\infty;\ -a[$, $]-a;\ a[$, $]a;\ +\infty[$. Асимптоты: $x=\pm a$, $y=0$; точка перегиба совпадает с началом координат. **662.** 2) Функция определена на отрезке $[-0{,}5;\ 0{,}5]$. График ее пересекает ось Oy в точках $M_1(0;\ -1)$, $M_2(0;\ 1)$, $O(0;\ 0)$; последняя точка является точкой самопересечения (узел). **663.** Функция не определена лишь в точке $x=0$; $y_{\min}=y(4)=2$, $y_{\max}=y(-4)=-2$. Асимптоты: $y=0{,}25x$, $x=0$. **664.** График функции симметричен относительно оси Oy, $y_{\max}=y(0)=1$, асимптотой является ось Ox $(y=0)$. **685.** $]1;\ 2[$. **686.** $]0;\ 1[$. **687.** $]-4;\ -3[$, $]-1;\ 0[$, $]3;\ 4[$. **688.** $]-4;\ -3[$, $]-2;\ -1[$, $]1;\ 2[$. **689.** $]-2;\ -1[$, $]0;\ 1[$. **690.** $]0;\ 1[$. **691.** $]-2;\ -1[$, $]0;\ 1[$. **692.** $]0;\ 1[$. **693.** $]-2;\ -1[$, $]1;\ 2[$. **694.** $]-2;\ -1[$, $]2;\ 3[$. **695.** $]1;\ 2[$. **696.** $]0;\ 1[$, $]3;\ 4[$. **697.** —0,6823. **698.** 1,3247. **699.** —1,3247. **700.** 0,6823. **701.** 0,4746, —1,3953. **702.** 0,6180, —1,6180. **703.** 0,4860, —1,7278. **704.** —1,4945, 0,7976. **705.** —0,7549. **706.** —1,1673. **707.** 0,7549. **708.** 1,1673. **709.** 0,4534. **710.** —0,5961. **711.** 2,1284, 0,2016. **712.** —1,4334. **713.** —1,6180; 0,6180; 2. **714.** —0,5550, —2,2470, 0,1819. **715.** —1,4526, 1,1640. **716.** —0,3377, —1,3075.

717. — 1,3888; 0,3347; 1,2146. **718.** — 0,4864. **719.** 1,4144. **720.** 0,275; 1,463. **721.** 1,4382; 2,6506. **722.** 2,7666. **723.** — 2,8539; 0,8213. **724.** 3,1990. **725.** 2,4567. **726.** — 1,250. **727.** 0,8105. **728.** — 0,8019; 0,5550; 2,2470. **729.** —0,4746, 1,3953. **730.** 0,5179; 1,3613. **731.** 2,9584; 5,2907. **732.** —1,3012; — 0,5645. **733.** 0,6485. **734.** 1,3160. **735.** — 2,2583. **736.** — 0,5321; 0,6527; 2,9273. **739.** 1,4236. **740.** 0,6328. **741.** —0,7781; 1,1347. **742.** —1,1347; 0,7781. **743.** —0,7965. **744.** —1,2492; 0,3334; 1,1332. **745.** 3) $\frac{x^5}{5}+2x^2-3x+5\ln|x|+C$. **746.** 3) $\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+4x+6\ln|x|+\frac{8}{x}+C$. **747.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$. **748.** $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$. **749.** $-\operatorname{ctg}x-x+C$. **750.** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$. **751.** $-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C$. **752.** $x-\cos x+C$. **753.** $2\operatorname{ctg}x+5\operatorname{tg}x+C$. **754.** $8\operatorname{tg}x-7\sin x+C$. **755.** $a^2x+\frac{2}{3}abx^3+\frac{1}{5}b^2x^5+C$. **756.** $\frac{a^3}{4}x^4-a^2bx^3+\frac{3}{2}ab^2x^2-b^3x+C$. **757.** $\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x\sqrt{x}+C$. **758.** $\sqrt{x}\left(2-\frac{4x^n}{2n+1}+\frac{2x^{2n}}{4n+1}\right)+C$. **759.** $\frac{a^x}{\ln a}-2\sqrt{x}+C$. **760.** $e^x-\frac{1}{2x^2}+C$. **761.** $2\arcsin x+3\operatorname{arcctg}x+C$. **762.** $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. **763.** $5\operatorname{arctg}x+9\arccos x+C$. **764.** $\frac{x^3}{3}-x+\operatorname{arctg}x+C$.

Замечание. В ответах на задачи 765—870 ради краткости будем опускать постоянную C.

765. $\frac{1}{12}(4x-7)^3$. **766.** $\frac{(ax+b)^3}{3a}$. **767.** $\frac{1}{9}(6x+5)\sqrt{6x+5}$. **768.** $\frac{2}{3p}(px+q)\sqrt{px+q}$. **769.** $\frac{1}{3}(x^2-4)^{\frac{2}{3}}$. **770.** $\frac{1}{3}(x^2+a)\sqrt{x^2+a}$. **771.** $5e^{\frac{x}{5}}$. **772.** $\frac{1}{4\ln a}a^{4x}$. **773.** $3\left(\sin\frac{x}{3}-\cos\frac{x}{3}\right)$. **774.** $-\frac{1}{a}\cos(ax-b)$. **775.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+9)$. **776.** $\frac{1}{2a}\ln|ax^2+b|$. **777.** $-3\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$. **778.** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}4x$. **779.** $2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. **780.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$. **781.** $3\arcsin\frac{x}{3}$. **782.** $\arcsin\frac{x}{2}$. **783.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+1}\right|$. **784.** $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|$. **785.** $-\ln|\cos x|$. **786.** $-\frac{1}{a}\times\sin(b-ax)$. **787.** $\frac{1}{4}(4x+5)^{\frac{3}{2}}$. **788.** $\frac{2}{3}\sqrt{3x+4}$. **789.** $\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}-6\sqrt{x+3}$. **790.** $\frac{2}{5}\sqrt{(x+3)^5}-\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3}$. **791.** $-\frac{2}{3}\sqrt{4+3\cos x}$. **792.** $\frac{1}{3}(1+2\sin x)^{\frac{3}{2}}$. **793.** $\frac{\sin^6 x}{6}$. **794.** $-\frac{\cos^5 x}{5}$. **795.** $\frac{1}{\cos x}$. **796.** $-\frac{1}{2\sin^2 x}$. **797.** $\frac{1}{4}e^{x^4}$. **798.** $-\frac{a^{\cos x}}{\ln a}$. **799.** $-\frac{1}{6}\ln|7-6x|$. **800.** $\ln(x^2+x+3)$. **801.** $\ln|\ln x|$. **802.** $-\frac{1}{\ln x}$. **803.** $\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{2}{\cos x}-\cos x$.

Указание. Применить подстановку $\cos x = t$. **804.** $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x$. Подстановка $\operatorname{tg} x = t$. **805.** $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **806.** $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$. **807.** $-\sqrt{1-x^2}$. **808.** $\frac{2}{3}(x^3-27)^{\frac{3}{2}}$. **809.** $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|$. Подстановка $x = \frac{1}{t}$. **810.** $\frac{1}{a}\times$ $\times \ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$. Подстановка $x = a\sin t$. **811.** $\frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x}$. **812.** $x(\ln 9x - 1)$. **813.** $-\frac{1}{4x^2}(2\ln 3x - 1)$. **814.** $x\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + \frac{3}{2}\ln|9-x^2|$. **815.** $\frac{x^2\operatorname{arctg} 7x}{2} - \frac{x}{14} + \frac{\operatorname{arctg} 7x}{98}$. **816.** $x\arccos\frac{x}{3} - \sqrt{9-x^2}$. **817.** $\frac{x^2\arcsin 6x}{2} - \frac{\arcsin 6x}{72} + \frac{\sqrt{1-36x^2}}{12}$. **818.** $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x -$ $-\beta\cos\beta x)$. **819.** $\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 2x - \ln 2x + \frac{1}{2}\right)$. **820.** $-\frac{x^2}{3}\cos 3x + \frac{2}{9}x\sin 3x +$ $+\frac{2}{27}\cos 3x$. **821.** $\frac{x^3}{3}\ln\frac{x}{2} - \frac{x^3}{9}$. **822.** $-4e^{-\frac{x}{4}}(x^2+8x-32)$. **823.** $2\sqrt{x}\times$ $\times(\ln 2x - 2)$. **824.** $-\frac{x}{2e^{2x}} - \frac{e^{-2x}}{4}$. **825.** $-\frac{\operatorname{ctg} 8x}{8} + \frac{\ln|\sin 8x|}{64}$. **826.** $\frac{x\sqrt{2}}{2}\sin\left(\ln\frac{x}{4} - \frac{\pi}{4}\right)$. **827.** $\frac{x\sqrt{2}}{2}\cos\left(\ln\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$. **828.** $\sqrt{2x} -$ $-\sqrt{1-2x}\arcsin\sqrt{2x}$. **829.** $e^{\sqrt{2x}}(2x-1)$. **830.** $\frac{\ln|\operatorname{tg} x|}{4} - \frac{x}{2\sin 2x}$. **831.** $-\frac{\cos^5 x}{5}$. **832.** $\frac{\sin^6 x}{6}$. **833.** $-\frac{\cos^4 x}{4} + \frac{\cos^6 x}{6}$. **834.** $\frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7}$. **835.** $\frac{x}{2} - \frac{\sin 10x}{20}$. **836.** $\frac{x}{2} + \frac{\sin 6x}{12}$. **837.** $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32}$. **838.** $\frac{3x}{128} -$ $-\frac{\sin 4x}{128} + \frac{\sin 8x}{1024}$. **839.** $-\frac{1}{\sin x} - 2\sin x + \frac{\sin^3 x}{3}$. **840.** $\frac{1}{\cos x} + 2\cos x -$ $-\frac{\cos^3 x}{3}$. **841.** $\frac{\sin 2x}{4} - \frac{\sin 4x}{8}$. **842.** $\frac{t\cos\varphi}{2} - \frac{\sin(2\omega t+\varphi)}{4\omega}$. **843.** $\frac{1}{12}\times$ $\times\sin 6x + \frac{1}{4}\sin 2x$. **844.** $\frac{1}{4}\sin(2x+\alpha) + \frac{x}{2}\cos\alpha$. **845.** $-\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos x}{2}$. **846.** $-\frac{1}{20}\cos(10x+\omega) - \frac{1}{4}\cos(2x+\omega)$. **847.** $-\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} -$ $-\frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)}$. **848.** $\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)}$. **849.** $\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} +$ $+\frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)}$. **850.** 1) $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$. *Указание.* Интеграл представить в виде $\int\frac{dx}{\cos^4 x} = \int\sec^2 x\,d(\operatorname{tg} x)$. **851.** $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{6}$. **852.** $\frac{1}{\sqrt{34}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{17}}x$. **853.** $\frac{1}{14}\ln\left|\frac{x-7}{x+7}\right|$. **854.** $\frac{1}{2\sqrt{20}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}x-\sqrt{10}}{\sqrt{3}x+\sqrt{10}}\right|$. **855.** $\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-9}{x+1}\right|$. **856.** $\frac{1}{22}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+8}\right|$. **857.** $\frac{2}{\sqrt{23}}\operatorname{arctg}\frac{4x-3}{\sqrt{23}}$. **858.** $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{8x-5}{\sqrt{7}}$.

859. $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}$. **860.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|$. **861.** $\frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5|+\frac{2}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-(x-1)}{\sqrt{6}+(x-1)}\right|$. **862.** $\frac{1}{2}\ln|x^2-x-1|-\frac{1}{2\sqrt{5}}\times\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right|$. **863.** $\ln|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}|$. **864.** $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+4}|$. **865.** $\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$. **866.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}$. **867.** $\arcsin(2x-1)$. **868.** $\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|$. **869.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}\right|$. *Указание.* Положить $x+1=\frac{1}{t}$. **870.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\ln\left|-\frac{x}{2(x+2)}+\sqrt{\frac{x^2+x+1}{3(x+2)^2}}\right|+C$. **871.** $\frac{x^2}{2}+\operatorname{arctg}x-\ln|x-1|+C$. **872.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(x-1)(x-4)}{(x-3)^5}\right|+C$. **873.** $\frac{x^2}{2}-x+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+C$. **874.** $\frac{1}{9}\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right|-\frac{1}{3(x-1)}+C$. **875.** $\frac{2}{25}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2+1}-\frac{1}{5(x+2)}+\frac{3}{25}\operatorname{arctg}x+C$. *Указание.* $x^4+4x^3+5x^2+4x+4=(x^4+x^2)+(4x^3+4x)+(4x^2+4)=(x^2+4x+4)(x^2+1)=(x+2)^2(x^2+1)$. **876.** $\ln|(x-1)(x^2+4)|+\frac{4}{x-1}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$. *Указание.* $x^4-2x^3+5x^2-8x+4=(x^4-2x^3+x^2)+(4x^2-8x+4)=(x^2+4)(x-1)^2$. **877.** $\ln\left|\frac{(x-2)^2(x^2+1)}{x+1}\right|+\frac{3}{x+1}-4\operatorname{arctg}x+C$. **878.** $\ln\left|\frac{(x+2)^3\sqrt{x^2+1}}{(x-1)^2}\right|-\frac{1}{x-1}-3\operatorname{arctg}x+C$. **879.** $\frac{1}{2}\left[\ln|(x-1)\sqrt{x^2+1}|+\frac{1-x}{x^2+1}\right]+C$. **880.** $\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}\right|+\frac{1}{1-x}-\frac{x}{x^2+1}-\operatorname{arctg}x+C$. **881.** 1) $\frac{\operatorname{tg}^3x}{3}+C$; 2) $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\cos x+C$. **882.** 1) tg^2x+C или $\frac{1}{\cos^2x}+C$; 2) $\operatorname{ctg}x-\frac{\operatorname{ctg}^3x}{3}+C$. **883.** 1) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4x+C$. *Указание.* Положить $\operatorname{tg}x=t$; 2) $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4x+C$. **884.** 1) $-\frac{1+\cos x+\sin^2x}{\sin x}+C$; 2) $\frac{\sin x+\cos^2x+1}{\cos x}+C$. **885.** 1) $\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+C$; 2) $\frac{1}{6}\sqrt{(2x^2+3)^3}+C$. **886.** 1) $\frac{1}{4}\sqrt[3]{(x^2+8)^4}+C$; 2) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(x^4+5)^4}+C$. **887.** 1) $-\frac{1}{3}\ln|1-x^3|+C$; 2) $\frac{3}{8}\ln(2x^4+7)+C$. **888.** 1) $-\frac{1}{b(a+bx)}+C$; 2) $\frac{1}{2b(a-bx)^2}+C$. **889.** 1) $-\frac{2}{3}(1+\cos x)^{\frac{3}{2}}+C$; 2) $-\frac{2}{9}(2+3\cos x)^{\frac{3}{2}}+C$. **890.** 1) $2\sqrt{2+\sin x}+C$; 2) $\sqrt{3+2\sin x}+C$. **891.** 1) $\frac{1}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+7}\right|+C$; 2) $\frac{1}{18}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C$. **892.** 1) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$; 2) $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2}+C$. **893.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\ln|x+2+$

$+\sqrt{x^2+4x+3}|+C$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x-1}|+C$. **894.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}\times$ $\times\arcsin\frac{x-2}{3}+C$; 2) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2(x+1)}{5}+C$. **895.** 2) $\frac{1}{2a^3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+\right.$ $\left.+\frac{ax}{a^2+x^2}\right)+C$. **896.** 1) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-2\sqrt{x+1}+C$. **897.** 1) $\frac{x^2+1}{2}\times$ $\times\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}+C$; 2) $-\frac{x}{2\sin^2 x}-\frac{\operatorname{ctg}x}{2}+C$. **898.** 1) $\frac{1}{32}x^4(8\ln^2 x-$ $-4\ln x+1)+C$; 2) $e^x(x^3-3x^2+6x-6)+C$. **899.** $18\frac{2}{3}$. **900.** $4\frac{1}{2}$. **901.** $17{,}5-6\ln 6\approx 6{,}7492$. **902.** $e-1$. **903.** 2. **904.** $6\frac{2}{5}$. **905.** $\frac{2}{3}$. **906.** $\frac{3}{16}\pi$. **907.** 36. **908.** $\approx -0{,}1386$. **909.** $\frac{\pi}{12}$. **910.** $\frac{\pi}{20}$. **911.** $\approx 0{,}3397$. **912.** $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$. **913.** $6\frac{2}{3}$. **914.** 1. **915.** $\frac{\pi a^4}{16}$. **916.** $2-\frac{\pi}{2}$. **917.** 1. **918.** π^2. **919.** $2\pi\leqslant J\leqslant 3\pi$. **920.** $\pi\leqslant J\leqslant 1{,}5\pi$. **921.** $0{,}5\leqslant J\leqslant 1$. **922.** $\frac{1}{3}<J\leqslant\frac{1}{2}$. **923.** 0,7365. **924.** 15,160. **925.** 19,492. **926.** 1,896. **927.** 91,658. **928.** 0,918. **929.** 1,429. **930.** 0,856. **931.** 139,164. **932.** 0,904. **933.** 0,473. **934.** 0,706. **935.** 3. **936.** 5. **937.** 5. **938.** 25. **939.** 315. **940.** 450. **941.** 1) 0,69377; 2) 0,56078; 3) 0,46442; 4) 0,40551; 5) 0,36231; 6) 0,32906; 7) 0,30257; 8) 0,28089; 9) 0,26280; 10) 0,24744. **942.** 1) 0,78458; 2) 0,23176; 3) 0,10723; 4) 0,06124; 5) 0,03948; 6) 0,02752; 7) 0,02027; 8) 0,01554; 9) 0,01229; 10) 0,00996. **943.** 1) 0,84259; 2) 0,45261; 3) 0,31055; 4) 0,23661; 5) 0,19119; 6) 0,16043; 7) 0,13821; 8) 0,12140; 9) 0,10824; 10) 0,09766. **944.** 1) 4; 2) 10; 3) 13. **945.** 1) 0,916; 2) 0,693; 3) 2,320. **946.** 1) 0,693150; 2) 0,404703; 3) 0,286990; 4) 0,223912; 5) 0,183161; 6) 0,153945; 7) 0,134110; 8) 0,117052; 9) 0,104999; 10) 0,099710. **947.** 1) 0,785398; 2) 0,667853; 3) 588826; 4) 0,536078; 5) 0,488999; 6) 0,457319; 7) 0,431297; 8) 0,407017; 9) 0,413011; 10) 0,392866. **948.** 1) 0,835653; 2) 0,748219; 3) 0,690238; 4) 0,647603; 5) 0,614285; 6) 0,587172; 7) 0,564462; 8) 0,545025; 9) 0,528104; 10) 0,513174. **949.** 1) $2n=6$; 2) $2n=4$; 3) $2n=4$. **950.** 1) 1,4142; 2) 2,6823; 3) 4,6708. **951.** 3. **952.** $\frac{16}{3}$. **953.** 36. **954.** 36. **955.** $\frac{e-1}{e}$. **956.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **957.** 4,5. **958.** 4,5. **959.** 27,64. **963.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **964.** πab. **965.** $\frac{\pi}{2}(a^2+2b^2)$. **966.** $\frac{4}{3}\pi^3 a^2$. **967.** $\frac{4}{3}$. **968.** πa^2. **969.** $\frac{4-\pi}{2}a^2$. **970.** $\frac{3a^2}{2}$. **971.** $2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5})$. *Указание.* $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ вычисляется интегрированием по частям. **972.** $\frac{1}{2}\ln 3\approx 0{,}5493$. **973.** $2a\operatorname{sh}1\approx 2{,}35a$. **974.** $9\frac{1}{3}$. **975.** $\sqrt{2}(e^{\frac{\pi}{2}}-1)$. Кривая называется логарифмической спиралью, ее уравнение в полярных координатах $r=e^{\varphi}$ (см. приложение 4). **976.** $2\pi a$. **977.** $16a$. **978.** $6a$. **979.** $\frac{3\pi a}{2}$. **980.** $4\sqrt{3}$. *Указание.* Пределы интегрирования определяются из уравнения $t-\frac{1}{3}t^3=0$. **981.** $\frac{\sqrt{5}}{2}+\ln\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Кри-

вая приведена в приложении 4. **982.** $a\sqrt{2}$. Кривая приведена в приложении 4. **983.** 32π. **984.** πp^3. **985.** $\frac{\pi^2}{2}$. **986.** $\frac{4\pi}{15}$. *Указание.* Пределы интегрирования $a=-1$, $b=1$ находятся из уравнения кривой $y^2=x^2(1-x^2)$. **987.** $\frac{a^3\pi}{4}\times$ $\times(e^2+4-e^{-2})$. **988.** $\frac{8\pi a^3}{3}$. **989.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$. **990.** $\frac{6\pi}{7}$. **991.** π. **992.** $\frac{4\pi}{15}$. **993.** $\frac{4}{3}\pi a^3$. **994.** $\frac{32\pi a^3}{105}$. **995.** $\frac{512}{15}\pi$. **996.** $19{,}2\pi$. **997.** $6\pi^3a^3$. **998.** 8π. **999.** $v_0t-\frac{gt^2}{2}$. **1000.** $s=10^4$ м. **1001.** $v=\frac{A}{b}\ln\left(\frac{a}{a-bt}\right)$, $h=\frac{A}{b^2}\left[bt_1-\right.$ $\left.-(a-bt_1)\ln\frac{a}{a-bt_1}\right]$. **1002.** $A=\frac{\pi\gamma}{2}R^2H^2$. *Указание.* Элементарная сила (сила тяжести равна весу воды в объеме слоя толщиной dx, т. е. $dF=\gamma\pi R^2dx$, где γ — вес единицы объема воды. Следовательно, элементарная работа силы $dA=\gamma\pi R^2(H-x)\,dx$, где x—уровень воды). **1003.** $A=\frac{mgh}{1+\frac{h}{R}}$. Сила, действующая на тело массой m, равна $F=k\frac{mM}{r^2}$, где r — расстояние от центра Земли. Так как при $r=R$ имеем $F=mg$, то $kM=gR^2$. Искомая работа $A=$ $=\int\limits_R^{R+h}k\frac{mM}{r^2}\,dr=kmM\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right)=\frac{mgh}{1+\frac{h}{R}}$. **1004.** $\frac{1}{4}MR^2\omega^2$. Р е ш е н и е. Кинетическая энергия частицы диска $dK=\frac{mv^2}{2}=\frac{pr^2\omega^2}{2}\,d\sigma$, где $d\sigma$— элемент площади; r — его расстояние от оси вращения; ρ — поверхностная плотность. Таким образом, $dK=\frac{M\omega^2}{2\pi R^2}r^2d\sigma$. Отсюда $K=\frac{M\omega^2}{R^2}\int\limits_0^R r^3dr=$ $=\frac{MR^2\omega^2}{4}$. **1005.** $K=\frac{M}{5}R^2\omega^2\approx 22{,}5\cdot10^8$ Дж. *Указание.* Количество необходимой работы равно запасу кинетической энергии. **1006.** $p=\gamma\frac{(a+2b)}{6}h^2\approx$ $\approx 117679{,}8\cdot10^3$ Н. **1007.** $p=ab\gamma\pi h$. **1008.** Вся плоскость Oxy. **1009.** Полуплоскость, расположенная над прямой $x-y=0$ $(x-y>0)$. **1010.** Две полуплоскости, определяемые прямой $y+x=0$. **1011.** Прямоугольник, определяемый неравенствами $-3<x\leqslant 3$, $-2\leqslant y\leqslant 2$. **1012.** Область, ограниченная эллипсом $x^2+4y^2=16$; точки самого эллипса не принадлежат области существования функции. **1013.** Кольцо между окружностями с радиусами $R_1=3$, $R_2=4$ с центрами в начале координат. **1014.** $2x-5y=C$; прямые, параллельные прямой $2x-5y=0$. **1015.** $x^3y=C$. **1016.** $x=Cy^2$; параболы при $C\neq 0$, прямая $x=0$ при $C=0$. **1017.** $C(x^2+y^2)=2y$; окружности при $C\neq 0$, прямая $y=0$ при $C=0$. **1018.** 1) $2x+3y-4z=C$; 2) $x^2+y^2+z^2=C^2$. **1019.** 1) x^2- $-y^2-2z=C$; 2) $x^2-y^2+z^2=C$. **1020.** $S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$; $0<x<p$, $0<y<p$, $x+y>p$. **1021.** $V=\frac{2}{3}x(y^2-x^2)$; $y>x>0$. **1022.** $f(0,\ 1)=f(0,\ -1)=\frac{2}{3}$, $f(1,\ 0)=\frac{3}{2}$, $f(1,\ 1)=f(a,\ a)=1$,

$f(a, -a)=-1$. **1023.** $f(-1, 0)=1$, $f(0, 1)=-1$, $f(2, 1)=0{,}6$, $f(-1, -2)=-0{,}6$. **1026.** $\Delta_x z = y\Delta x$, $\Delta_y z = x\Delta y$, $\Delta z = x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y$. **1027.** $\Delta_x z = \Delta x\,(2x + y + \Delta x)$, $\Delta_y z = \Delta y\,(x - 4y - 2\Delta y)$, $\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z + \Delta x\Delta y$. **1029.** 1) $y = -2$; 2) $y = x$; 3) $x^2 + y^2 = 4$; 4) $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $x^2 + y^2 - 9 = 0$. **1030.** $z'_x = 2xy^2$, $z'_y = 2x^2 y$. **1031.** $z'_x = 3x^2y^2 + y^3$, $z'_y = 2x^3 y + 3xy^2$. **1032.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$. **1033.** $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y^2}{(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^2}{(x+y)^2}$. **1034.** $z'_x = 2xe^{x^2+y^2}$, $z'_y = 2ye^{x^2+y^2}$. **1035.** $z'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = x^y \ln x$. **1036.** $dz = \dfrac{y^2dx + x^2dy}{(x+y)^2}$. **1037.** $dz = \dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$. **1038.** $d\omega = \sin 3\varphi dr + 3r\cos 3\varphi d\varphi$. **1039.** $du = e^z\left(-\dfrac{y}{x^2}dx + \dfrac{1}{x}dy + \dfrac{y}{x}dz\right)$. **1040.** $du = \dfrac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **1041.** $du = \dfrac{-2xydx + (x^2 - y^2 + z^2)\,dy - 2zydz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$. **1042.** $-0{,}1$. **1043.** $-0{,}15$. **1044.** $0{,}1$. **1045.** $1{,}2$. **1046.** $0{,}3$. **1047.** $2{,}97$. **1048.** 1) $1{,}06$; 2) $4{,}85$; 3) $14{,}927$; 4) $0{,}12$. **1049.** Уменьшится на 1,2 мм. **1050.** 1) $z''_{xx} = 6xy^2$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 6x^2y$, $z''_{yy} = 2x^3$; 2) $z''_{xx} = 6x + 8y$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 8x - 12y$. **1052.** 1) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 6y$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} = 12xy$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 6(x^2+y^2)$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 6x^2$; 6) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial t} = 2\cos 2t$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} = 10z^4$, $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} = 40z^3$, $\dfrac{\partial^5 u}{\partial z^5} = 120x^2$. **1053.** $z_{\min} = 0$. **1054.** $z_{\min} = 0$. **1055.** $z_{\min} = 3$. **1056.** $z_{\min} = 5$. **1057.** $\min f(x, y) = f(1, 3) = 4$. **1058.** $\min f(x, y) = f(-2, -4) = 1$. **1059.** $\min f(x, y) = f(4, 1) = -152$, $\max f(x, y) = f(-4, -1) = 152$. **1060.** $\min f(x, y) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$. **1071.** $y = 2{,}23x$. **1072.** $y = 3{,}1x$. **1073.** $y = 4{,}04x$. **1074.** $y = -2{,}12x$. **1075.** $y = -0{,}73x$. **1076.** $y = 1{,}27x$. **1077.** $y = 2{,}44x$. **1078.** $y = 0{,}34x$. **1079.** $y = 0{,}56x + 3{,}45$. **1080.** $y = -1{,}97x + 8{,}10$. **1081.** $y = 3{,}2x - 7{,}5$. **1082.** $y = -4{,}25x - 1{,}90$. **1083.** $y = 3{,}19x - 0{,}37$. **1084.** $y = 0{,}425x + 1{,}175$. **1085.** $y = 3{,}023x - 1{,}08$. **1087.** $y = 0{,}75x^2 + 0{,}15$. **1088.** $y = 0{,}22x^2 + 0{,}88$. **1089.** $y = 1{,}5x^2 - 0{,}3$. **1090.** $y = 2{,}79x^2 - 0{,}59$. **1091.** $y = -0{,}75x^2 + 0{,}85$. **1092.** $y = -0{,}14x^2 - 0{,}86$.

1093. $a\sum_{i=1}^{n} x_i^6 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^3$; $a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i$. **1094.** $a\sum_{i=1}^{n} \times \cos^2 2x_i + b\sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i \cos 2x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cos 2x_i$; $a\sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i \cos 2x_i + b\sum_{i=1}^{n} \times \sin^2 2x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \sin 2x_i$. **1095.** $a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$; $a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$; $a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

1096. $nc + a\sum_{i=1}^{n} \cos x_i + b\sum_{i=1}^{n} \sin x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$; $c\sum_{i=1}^{n} \cos x_i + a\sum_{i=1}^{n} \cos^2 x_i + b\sum_{i=1}^{n} \sin x_i \cos x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cos x_i$, $c\sum_{i=1}^{n} \sin x_i + a\sum_{i=1}^{n} \sin x_i \cos x_i + b\sum_{i=1}^{n} \times$

$\times \sin^2 x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \sin x_i$. **1097.** $y = 1{,}936\,x^2 + 0{,}394\,x + 0{,}502$. **1099.** $y = 0{,}9\,x - 0{,}2$. **1100.** $y = 6\,x + \frac{26}{3}$. **1101.** $u_n = \frac{1}{2n-1}$. **1102.** $u_n = \frac{1}{(2n-1)\,2^n}$. **1103.** $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$. **1104.** $u_n = \frac{n}{2n-1}$. **1105.** $u_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$. **1106.** $u_n = (-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}$. **1107.** $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ **1108.** $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ **1109.** $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots$ **1110.** $1 + \frac{1\cdot 2}{2^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{3^3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{4^4} + \ldots$ **1111.** $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$ **1112.** $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \ldots$ **1113.** $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \ldots$ **1114.** $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^8}{8} + \ldots$ **1115.** Сходится Каждый член ряда, начиная со второго, меньше соответствующего члена сходящегося ряда $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots$. **1116.** Сходится. *Указание.* Сравнить с рядом задачи 1115. **1117.** Расходится. *Указание.* Найти $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ и воспользоваться следствием из необходимого признака. **1118.** Расходится (см. указание к задаче 1117). **1119.** Расходится. *Указание.* Сравнить с гармоническим рядом, умноженным на $\frac{1}{2}$. **1120—1123.** Сходится. **1124.** Расходится. **1125, 1126.** Сходится. **1127.** Сходится абсолютно. **1128.** Сходится абсолютно (см. задачу 1115). **1129.** Сходится условно (см. задачу 1119). **1130.** Сходится условно. **1131.** 10. **1132.** 20. **1133.** $-1 \leqslant x < 1$. **1134.** $-\infty < x < \infty$. **1135.** $|x| \leqslant 1$. **1136.** $|x| < 1$. **1137.** $1 < x < 3$. **1138.** $-4 < x < -2$. **1139.** 1) $\sin\alpha\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + \cos\alpha\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)$. **1140.** 1) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$ $(-\infty < x < \infty)$. **1141.** 1) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln^n a}{n!}$ $(-\infty < x < \infty)$. **1142.** 1) $\sqrt{a}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{x}{a} - \frac{1}{2\cdot 4} \times \frac{x^2}{a^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^3}{a^3} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\,\frac{x^4}{a^4} + \ldots\right)$, $|x| < a$. *Указание.* $\sqrt{a+x} = \sqrt{a\left(1 + \frac{x}{a}\right)} = \sqrt{a}\left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}(1+t)^{\frac{1}{2}}$, где $t = \frac{x}{a}$. Воспользоваться формулой (12) гл. X для случая $m = \frac{1}{2}$; 2) *Указание.* В разложении $\sqrt{a+x}$ положить $a = 1$. **1143.** 1) $\frac{1}{\sqrt{a}}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{x}{a} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^2}{a^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} \times \frac{x^3}{a^3} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\,\frac{x^4}{a^4} - \ldots\right)$, $|x| < a$. **1144.** 1) $\sqrt{a}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{a} - \frac{1}{8} \times\right.$

$\times \frac{x^4}{a^2} + \frac{1}{16}\frac{x^6}{a^3} - \frac{5}{128}\frac{x^8}{a^4} + \ldots\Big)$, $|x| < \sqrt{a}$. **1145.** 1) $a\Big(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{a^2} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{a^4} + \frac{1}{16}\frac{x^3}{a^6} - \frac{5}{128}\frac{x^4}{a^8} + \ldots\Big)$, $|x| < a^2$. **1146.** 1) $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2^2}\times$ $\times \frac{x^2}{2!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\frac{x^3}{3!} + \ldots$, $|x| < 1$; 2) $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^2}\frac{x^4}{2!} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3}\frac{x^6}{3!} +$ $+ \ldots$, $|x| < 1$. **1147.** $-20 - 22(x+3) + 31(x+3)^2 - 10(x+3)^3 + (x+3)^4$. **1148.** $10 - 21(x-1) - 24(x-1)^2 - 12(x-1)^3 - 2(x-1)^4 + (x-1)^5$. **1149.** $e^{-4}\left[1 + \frac{(x+4)}{1!} + \frac{(x+4)^2}{2!} + \frac{(x+4)^3}{3!} + \ldots\right]$. **1150.** $2\left[1 + \frac{x-4}{2^3} - \right.$ $\left. - \frac{(x-4)^2}{2^6\cdot 2!} + \frac{1\cdot 3\,(x-4)^3}{2^9\cdot 3!} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\,(x-4)^4}{2^{12}\cdot 4!} + \ldots\right]$. **1151.** $\frac{1}{3} - \frac{x-3}{9} +$ $+ \frac{(x-3)^2}{27} - \frac{(x-3)^4}{81} + \ldots$ **1152.** $1 + \frac{3}{2}\left[(x-1) + \frac{1}{2}\frac{(x-1)^2}{2!} - \right.$ $\left. - \frac{1}{4}\frac{(x-1)^3}{3!} + \ldots\right.$ **1153.** 3 члена. **1154.** 4 члена. **1155.** 2,96. *Указание.* $\sqrt[3]{26} = \sqrt[3]{27-1} = \sqrt[3]{27\left(1 - \frac{1}{27}\right)} = 3\left(1 - \frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$. Воспользоваться формулой (12) гл. X для случая $x = -\frac{1}{27}$, $m = \frac{1}{3}$. **1156.** 4,123. *Указание.* $\sqrt{17} = \sqrt{16+1} = \sqrt{16\left(1 + \frac{1}{16}\right)} = 4\left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$. **1157.** 6,4031. **1158.** 4,021. **1159.** 0,492. *Указание.* $\frac{1}{\sqrt[5]{1+x^2}} = 1 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{25}x^4 - \frac{11}{125}x^6 +$ $+ \frac{44}{625}x^8 + \ldots$ **1160.** 0,3394. *Указание.* $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 +$ $+ \frac{1}{16}x^6 - \frac{5}{128}x^8 + \ldots$ **1166.** 1) $y = (x+2)^8$; 5) $y = (x-3)^2$. **1167.** 1) $x^2 +$ $+ y^2 + 2x = 0$ или $(x+1)^2 + y^2 = 1$. **1168.** Общее. **1169, 1170.** Частное. **1171, 1172.** Общее. **1173.** $y' + y = 0$. **1174.** $y'' - y = 0$. **1175.** $y'' + 16y = 0$. **1176.** $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$. **1177.** $y = C(x+2) + 3$, $y = 4x + 11$. **1178.** $(x +$ $+ 3)^2 + (y-5)^2 = C^2$, $(x+3)^2 + (y-5)^2 = 100$. **1179.** $(x+1)^2 + 2(y-1)^2 =$ $= C^2$, $(x+1)^2 + 2(y-1)^2 = 4$. **1180.** $(x-2)^2 - 4(y+1)^2 = C^2$, $(x-2)^2 -$ $- 4(y+1)^2 = 16$. **1181.** $(x+3)(y-6) = C$, $(x+3)(y-6) = 12$. **1182.** $y =$ $= (x+1)^2 + C$, $y = (x+1)^2 - 3$. **1183.** $(y-1)^2 = 6x + C$, $(y-1)^2 = 6x + 7$. **1184.** $y = Cx + 2$, $y = x + 2$. **1185.** $y - 1 = Ce^x$, $y = e^x + 1$. **1186.** $y = e^{Cx}$, $y = e^x$. **1187.** $y = 7\operatorname{tg} x + 3\sin x + C$. **1188.** $y = \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + C$. **1189.** $y = x -$ $- \operatorname{arctg} x + C$. **1190.** $y = -\frac{1}{5(x+1)^5} + \frac{1}{3(x+1)^6} - \frac{1}{7(x+1)^7} + C$. **1191.** $y =$ $= \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{2(x+1)}{3} + C$. **1192.** $y = \frac{1}{30}\ln\left|\frac{3x-8}{3x+8}\right| + C$. **1193.** $y = \ln|x +$ $+ 3 + \sqrt{x^2+6x+8}| + C$. **1194.** $y = \frac{x-2}{2}\sqrt{12+4x-x^2} + 8\arcsin\frac{x-2}{4} +$

$+C$. **1195.** $y=\frac{x^3}{3}-x+6\operatorname{arctg}x+C$. **1196.** $y=\ln|x-1|-\frac{8x-7}{(x-1)^2}+C$. **1197.** $(y^2+1)=C(x^2-1)$. **1198.** $(x^2+1)(y^2+1)=Cx^2$. **1199.** $r\cos\varphi=C$. **1200.** $r=\frac{a}{\varphi}+C$. **1201.** $x^2+y^2=2Cx$. **1202.** $y^2-2Cx=C^2$. **1203.** $x^2+4y^2=2Cy$. **1204.** $x^2-y^2=2Cy$. **1205.** $6x^2+y^2=2Cy$. **1206.** $3x^2-y^2=2Cy$. **1207.** $x^3+y^3=3Cx$. **1208.** $x^3+y^3=3Cy$. **1209.** $x^4+y^4=4Cy$. **1210.** $x^4+y^4=4Cx$. **1211.** $y=Ce^{2x}-2x^2+x+3$. **1212.** $y=Ce^{-x}+x^2-2x+2$. **1213.** $y=x(\ln x^2+C)$. **1214.** $y\sin x=\ln\operatorname{tg}\left|\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right|+C$. **1215.** $y=3x+C\sqrt{1-x^2}$. **1216.** $y=4x+Cx\sqrt{x^2-1}$. **1217.** $y=Cx+x^2$. **1218.** $y=C\times\cos x+\sin x$. **1219.** $y=x^2+1+C\sqrt{x^2+1}$. **1220.** $y=C(x^2+x)-1$. **1231.** $y=e^x+C_1x+C_2$. **1232.** $y=\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2$. **1233.** $y=\frac{x^2}{2}+x\ln x+(C_1-1)x+C_2$. **1234.** $y=\frac{x^2}{2}+\ln x+C_1x+C_2$. **1235.** $y=\frac{1}{2}(C_1e^x+C_1e^{-x})+C_2$. **1236.** $y=\frac{C_1x+C_2-1}{C_1x+C_2}$; $y=1$. Замечание. Решение $y=1$ не получается из общего ни при каких численных значениях C_1 и C_2. Такое решение называется *особым*. **1237.** $y=x^3-x^2-4x+7$. **1238.** $y^2-x^2=1$. **1239.** $(6y+13)^2=(2x-1)^3$. **1240.** $x=\ln(y+\sqrt{y^2-1})$. **1241.** $x=\ln\cos y$. **1242.** $256y=(x-1)^4$. **1243.** $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}$. **1244.** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$. **1245.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}$. **1246.** $y=C_1e^{-4x}+C_2e^{3x}$. **1247.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-4x}$. **1248.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-5x}$. **1249.** $y=C_1+C_2e^{-2x}$. **1250.** $y=C_1+C_2e^{3x}$. **1251.** $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$. **1252.** $y=(C_1+C_2x)e^{-3x}$. **1253.** $y=(C_1x+C_2)e^{-\frac{x}{3}}$ **1254.** $y=(C_1x+C_2)e^{-5x}$. **1255.** $y=e^{3x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. **1256.** $y=e^{3x}\times\times(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x)$. **1257.** $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$. **1258.** $y=e^{-4x}\times\times(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$. **1259.** $y=C_1\cos\frac{x}{3}+C_2\sin\frac{x}{3}$. **1260.** $y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x$. **1261.** $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+2e^{2x}$. **1262.** $y=C_1e^{-7x}+C_2e^{-2x}+\frac{1}{6}e^{4x}$. **1263.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}+4xe^{2x}$. **1264.** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}-2xe^{-2x}$. **1265.** $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{x}{2}}+3x^2e^{-\frac{x}{2}}$. **1266.** $y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{2}x^2e^{-x}$. **1267.** $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{x}{3}}+3x^2+9x+8$. **1268.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}+2x^2+3x+4$. **1269.** $y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{x}{5}}+2x^2-32x+100$. **1270.** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+\frac{7}{4}$. **1271.** $y=C_1e^x+C_2e^{3x}+\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}$. **1272.** $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-x}-2x-3$. **1273.** $y=C_1+C_2e^{2x}-x^3+x^2-5x$. **1274.** $y=C_1+C_2e^{-4x}+\frac{x^3}{4}-\frac{3x^2}{16}+\frac{3x}{32}$. **1275.** $y=C_1e^{5x}+C_2e^{-2x}-\frac{2}{13}\sin x-\frac{9}{39}\cos x$. **1276.**

$y = C_1e^{5x} + C_2e^{x} + \sin x + \cos x$. **1277.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{6x} + 2\sin 4x + \dfrac{\cos 4x}{4}$.

1278. $y = C_1e^{-6x} + C_2e^{x} - \sin 3x - \cos 3x$. **1279.** $y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x + 3x\cos 4x$. **1280.** $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + 2x\sin 2x$. **1281.** $\omega \neq 2$. **1282.** $\lambda^2 \neq 9$. **1283.** $0 < p < 2$. **1284.** $\lambda^2 > 1$. **1285.** $x = A\sin(t + \varphi)$. **1286.** $x = A\sin(2t + \varphi)$. **1287.** $x = A\sin(3t + \varphi)$. **1288.** $x = C_1e^{-9t} + C_2e^{-t}$. **1289.** $x = C_1e^{-8t} + C_2e^{-2t}$. **1290.** $x = e^{-2t}(C_1 + C_2t)$. **1291.** $x = e^{-3t}(C_1 + C_2t)$. **1292.** $x = Ae^{-4t}\sin(3t + \varphi)$. **1293.** $x = Ae^{-3t}(\sin 4t + \varphi)$. **1294.** $x = A\sin(t + \varphi) - \sin 2t$. **1295.** $x = A\sin(2t + \varphi) - 2\sin 3t$. **1296.** $x = A\sin(t + \varphi) - 2t\cos t$. **1297.** $x = A\sin(3t + \varphi) - 4t\cos 3t$. **1298.** $x = Ae^{-4t}\sin(3t + \varphi) - \dfrac{32}{17}\cos 4t + \dfrac{9}{17}\sin 4t$. **1299.** $x_0 = Ae^{-3t}\sin(4t + \varphi)$. **1300.** $x = Ae^{-t}\sin(t + \varphi) - 2\cos t + \sin t$. **1301.** $x = \sqrt{2}\sin\left(t + \dfrac{\pi}{4}\right)$. **1302.** $x = \sqrt{2}\sin\left(2t - \dfrac{\pi}{4}\right)$. **1303.** $x = 2\sqrt{2}\sin\left(3t - \dfrac{\pi}{4}\right)$. **1304.** $x = 2\sqrt{2}\sin \times \left(4t + \dfrac{\pi}{4}\right)$. **1305.** $x = \sin 5t$. **1306.** $x = 2\sin 3t$. **1307.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}$, $z = 2C_1e^{-x} - 2C_2e^{3x}$. **1308.** $y = 2C_1e^{3x} - 4C_2e^{-3x}$, $z = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$. **1309.** $y = e^{x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$, $z = e^{x}(C_1\sin 3x - C_2\cos 3x)$. **1311.** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x}$, $z = -5C_1e^{-2x} - C_2e^{2x}$. **1312.** $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{4x}$, $z = -3C_1e^{-4x} - \dfrac{1}{3}C_2e^{4x}$. **1313.** $x = C_1e^{-t} + C_2e^{t} - 6t - 3$, $y = C_1e^{-t} + \dfrac{7}{9}C_2e^{t} - \dfrac{39}{9}t - \dfrac{24}{9}$. **1314.** $x = C_1e^{-t} + C_2e^{t} + t^2 + 2t + 2$, $y = 1{,}2\,C_1e^{-t} + C_2e^{t} + 1{,}2\,t^2 + 2t + 2$. **1315.** $x = C_1e^{-5t} + C_2e^{5t} - \dfrac{3}{4}e^{3t} + \dfrac{4}{9}e^{4t}$, $y = \dfrac{1}{2}C_2e^{5t} - 2C_1e^{-5t} + \dfrac{1}{9}e^{4t} + \dfrac{1}{4}e^{3t}$. **1316.** $x = C_1e^{-t} + C_2e^{t} + 14e^{2t} + 5e^{-2t}$, $y = 1{,}4C_1e^{-t} + C_2e^{t} + 6{,}2\,e^{2t} + 8e^{-2t}$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Некоторые тригонометрические формулы

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}; \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2};$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)];$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}; \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

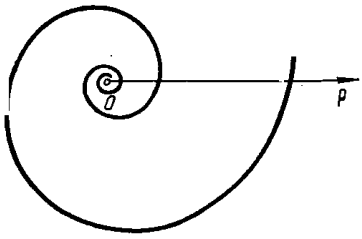
(Знаки перед радикалами берутся в соответствии с тем, в какой четверти лежит угол $\frac{\alpha}{2}$.)

2. Некоторые постоянные

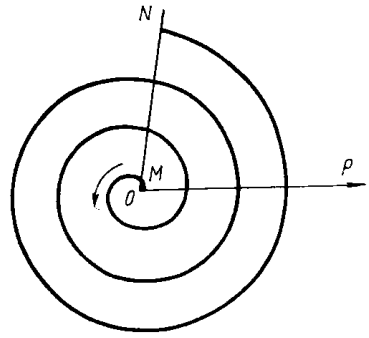
x	Значение x	$\lg x$	x	Значение x	$\lg x$
π	3,1416	0,4971	e	2,7183	0,4343
$1/\pi$	0,3183	1,5029	$1/e$	0,3679	$\bar{1}$,5657
π^2	9,8696	0,9943	e^2	7,3891	0,8686
$\sqrt{\pi}$	1,7725	0,2486	$\sqrt{e}$	1,6487	0,2171
$\sqrt{1/\pi}$	0,5642	$\bar{1}$,7514	$1/e^2$	0,1353	$\bar{1}$,1314
$\sqrt{2/\pi}$	0,7979	$\bar{1}$,9019	$\sqrt{1/e}$	0,6065	$\bar{1}$,7829
$\sqrt{3/\pi}$	0,9772	$\bar{1}$,9900	$\sqrt[3]{e}$	1,3956	0,1448
$\sqrt{4/\pi}$	1,1284	0,0525	$M = \lg e$	0,4343	$\bar{1}$,6378
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4646	0,1657	$\frac{1}{M} = \ln 10$	2,3026	0,3622

3. Значения тригонометрических функций для некоторых углов

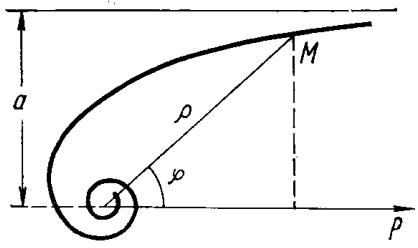
φ	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\operatorname{tg}\varphi$	$\operatorname{ctg}\varphi$	$\sec\varphi$	$\operatorname{cosec}\varphi$
0°	0	1	0	∞	1	∞
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90°	1	0	∞	0	∞	1



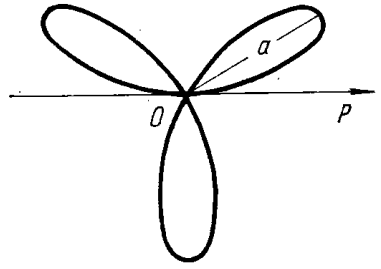
Логарифмическая спираль: $\rho = ae^{k\varphi}$.



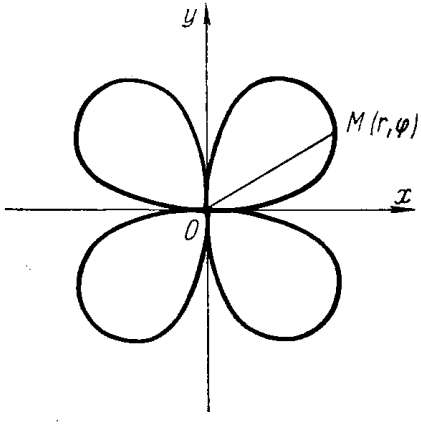
Спираль Архимеда: $\rho = a\varphi$.



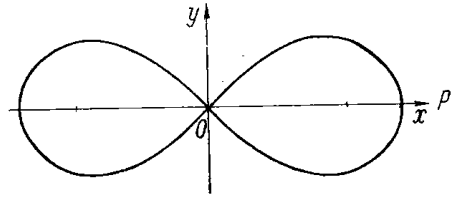
Гиперболическая спираль: $\rho = \frac{a}{\varphi}$.



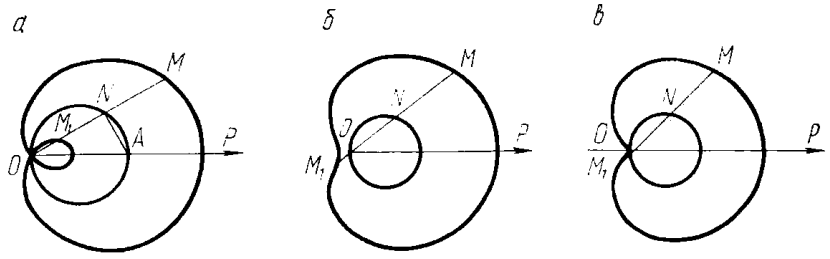
Трехлепестковая роза: $\rho = a \sin 3\varphi$.



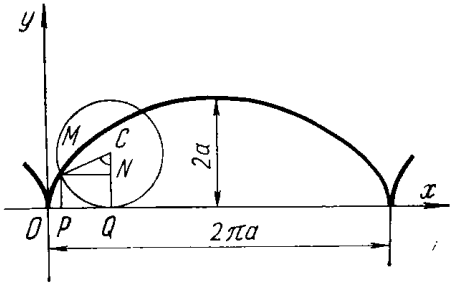
Четырехлепестковая роза: $\rho = a \sin 2\varphi$.



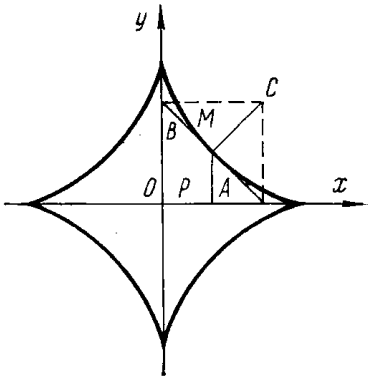
Лемниската Бернулли: $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.



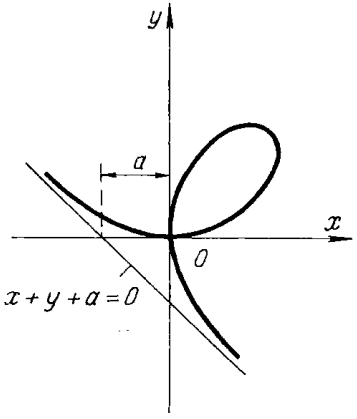
Улитка Паскаля: $\rho = l + 2r\cos\varphi$.



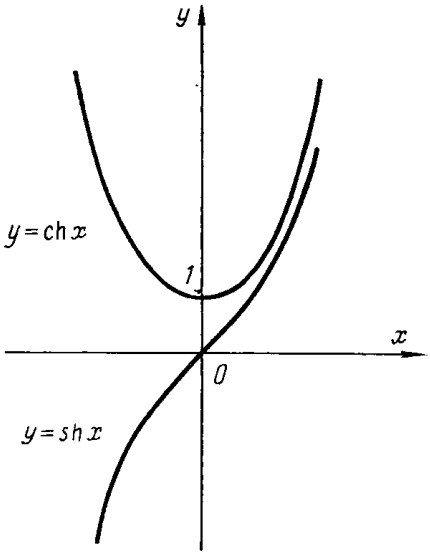
Циклоида: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.



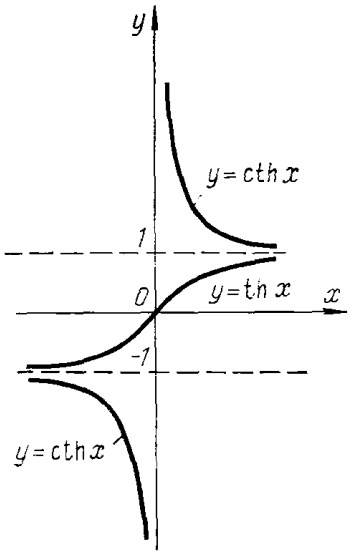
Астроида: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ или $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.



Декартов лист: $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ или $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$.

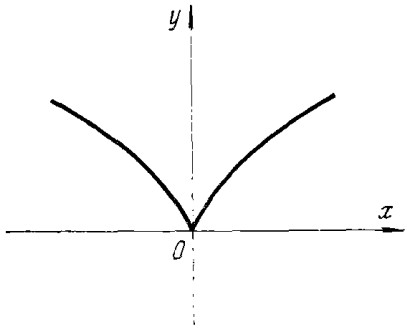


Графики гиперболических функций: $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.



Графики гиперболических функций: $y = \operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,

$y = \operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.



Парабола Нейля $y = x^{\frac{2}{3}}$.

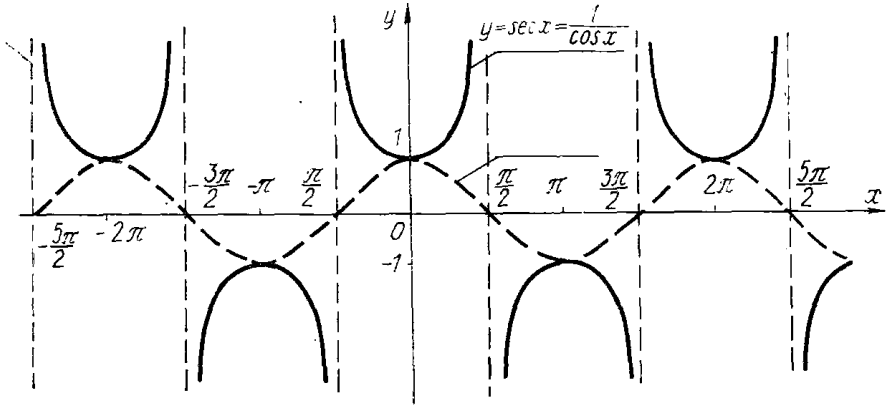


График функции $y = \sec x$.

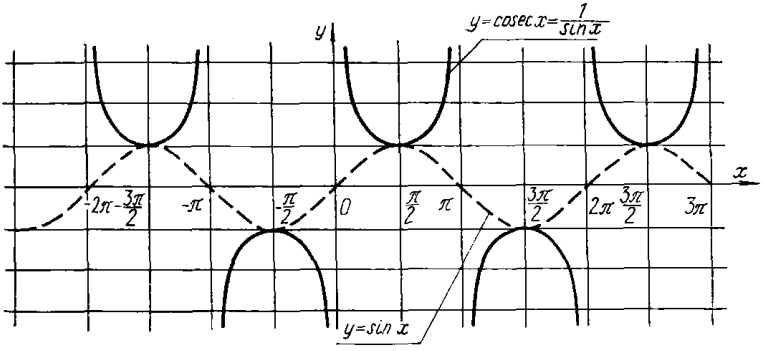


График функции $y = \operatorname{cosec} x$.

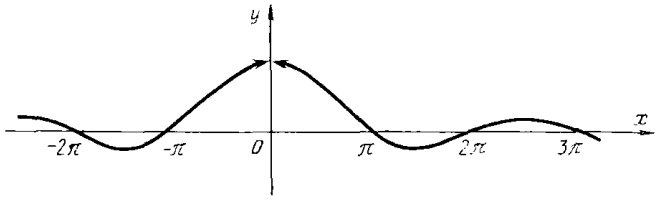
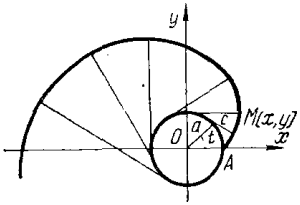
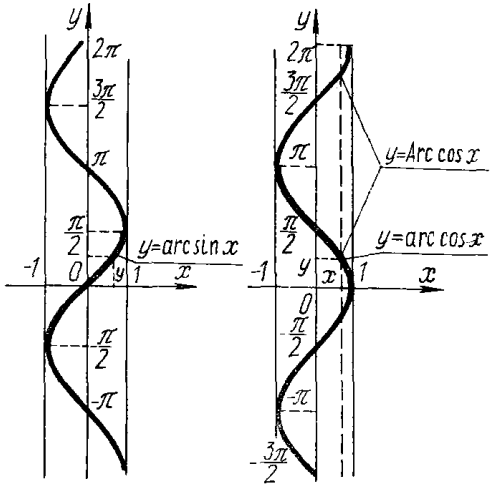


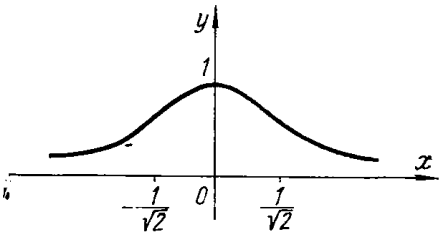
График функции $x = \dfrac{\sin x}{x}$.



Эвольвента (развертка) окружности: $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$.



Графики обратных тригонометрических функций: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$.



Кривая «вероятностей»: $y=e^{-x^2}$.

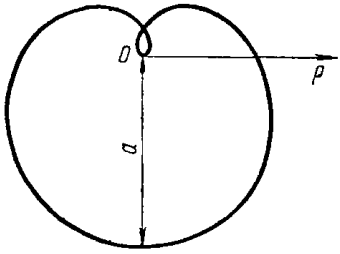


График функции $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

ЛИТЕРАТУРА

Гусак А. А. Пособие к решению задач по высшей математике.—3-е изд.— Минск: Изд-во БГУ, 1973.
Гусак А. А. Элементы методов вычислений.— Минск: Изд-во БГУ, 1974.
Гусак А. А. Высшая математика.— Минск: Изд-во БГУ, 1976, т. I; 1978, т. II.
Кудрявцев В. А., Демидович Б. П. Краткий курс высшей математики.— М.: Наука, 1975.
Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.—4-е изд.— Минск: Вышэйшая школа, 1970.
Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.—Минск: Вышэйшая школа, 1974.

АЛЕКСЕЙ АДАМОВИЧ ГУСАК

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Редакторы *А. А. Белянкина, Е. В. Сукач*
Мл. редактор *Т. С. Капелян*
Обложка *В. А. Квартального*
Художн. редактор *Ю. С. Сергачев*
Техн. редактор *М. Н. Кислякова*
Корректор *Н. С. Захарченко*

ИБ № 912

Сдано в набор 24.01.80. Подписано в печать 30.06.80. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типогр. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 17. Уч. изд. л. 18,06. Изд. № 78-173. Тираж 8000 экз. Зак. № 620. Цена 75 коп.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048, Минск, Парковая магистраль, 11.

Типография им. Франциска (Георгия) Скорины издательства «Наука и техника». Минск, Ленинский пр. 68